Przykład przedstawia rozwiązanie problemu brzegowego

$$\begin{cases} 7u'' + 3xu = 9x^2 + 4 \\ u'(-1) = 3 \\ u(2) = -2 \end{cases} \tag{1}$$

metodami residuów ważonych i MES.

Metoda residuów ważonych

Zanim zaczniemy obliczenia metodami wariacyjnymi zamienimy powyższy problem z niejednorodnymi warunkami brzegowymi na problem równoważny z jednorodnymi warunkami. W tym celu podstawimy za $u(x) = y(x) + u_0(x)$ gdzie funkcja $y(x)$ będzie spełniać jednorodne warunki brzegowe, a $u_0(x)$ jest dowolną funkcją która spełnia niejednorodne warunki. Dla naszego przykładu przyjmiemy funkcje postaci $u_0(x) = ax + b$. Po uwzględnieniu warunku $u'(-1) = y'(-1) + a = 3 \ \Rightarrow a = 3$. Analogicznie dla drugiego warunku mamy $u(2) = y(2) + a \cdot 2 + b = -2$ oraz wykorzystując, że $y(2) = 0$ (warunek jednorodny) $\Rightarrow 2a + b = -2 \Rightarrow 2 \cdot 3 + b = -2 \Rightarrow b = -8$.

W ten sposób otrzymaną zależność $u(x) = y(x) + 3x - 8$ wstawimy do równania (1) i otrzymamy problem brzegowy z jednorodnymi warunkami brzegowymi

$$\begin{cases} 7y'' + 3xy = 24x + 4 \\ y'(-1) = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

Residuum dla tego problemu wynosi $R(x) = 7y'' + 3xy - 24x - 4$

Ogólny wzór metody residuów ważonych ma postać

$$\int_\Omega wR(x)\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2}$$

a dla naszego przykładu równanie (2) przyjmie postać

$$\int_{-1}^{2} w(7y'' + 3xy - 24x - 4)\mathrm{d}x = 0 \tag{3}$$

1. Metoda Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu słabym

   Startujemy z równań

$$\int_{-1}^{2} w(7y'' + 3xy)\mathrm{d}x \ - \int_{-1}^{2} w(24x + 4)\mathrm{d}x = 0$$

   Pierwszy człon równania całkujemy przez części

$$7wy' \Big|_{-1}^{2} + \int_{-1}^{2} (-7w'y' + 3xwy)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{2} w(24x + 4)\mathrm{d}x = 0 \tag{4}$$

   Zważywszy na to, że funkcja w spełniać ma jednorodny podstawowy warunek brzegowy to $wy' \Big|_{-1}^{2} = 0$.

Podstawiamy za $y = \mathbf{\Phi d}$ i za funkcje wagową $w = \mathbf{\Phi c} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}$, oraz przyjmujemy trzy funkcje bazowe spełniające jednorodny **podstawowy** warunek brzegowy (co najmniej klasy ciągłości C^1)

$$\mathbf{\Phi} = [x - 2 \quad (x-2)^2 \quad (x-2)^3]$$

Równanie (4) po przekształceniach przyjmie postać

$$\int_{-1}^{2} (-7\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}'^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}'\mathbf{d} + 3x\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi d})\mathrm{d}x - \int_{-1}^{2} \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(24x+4)\mathrm{d}x = \mathbf{0}$$

a dla warunku, że równanie to jest spełnione dla każdego $\mathbf{c} \neq 0$ mamy

$$\int_{-1}^{2} (-7\mathbf{\Phi}'^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}'\mathbf{d} + 3x\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi d})\mathrm{d}x - \int_{-1}^{2} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(24x+4)\mathrm{d}x = \mathbf{0}$$

Po przemnożeniu i scałkowaniu otrzymamy układ równań

$$\begin{bmatrix} -27.750 & 87.300 & -261.900 \\ 87.300 & -324.900 & 1058.786 \\ -261.900 & 1058.786 & -3647.604 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18.000 \\ -18.000 \\ 113.400 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 9.719 \\ 5.391 \\ 0.836 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie $y(x) = 9.719 \cdot \Phi_1 + 5.391 \cdot \Phi_2 + 0.836 \cdot \Phi_3 = 0.836x^3 + 0.375x^2 - 1.813x - 4.465$ a wracając do równania wyjściowego $u(x) = y(x) + u_0(x) = 0.836x^3 + 0.375x^2 - 1.813x - 4.465 + 3x - 8 = 0.836x^3 + 0.375x^2 + 1.187x - 12.562$.

2. Metoda Bubnowa-Galerkina w sformułowaniu mocnym

   Rozwiązania będziemy szukać w bazie funkcji dopuszczalnych spełniających **podstawowe** i **naturalne** warunki brzegowe, oraz co najmniej klasy ciągłości C^2.

   Przyjmiemy trzy funkcje bazowe

$$\mathbf{\Phi} = [x^2 + 2x - 8 \quad x^3 - 1.5x^2 - 6x + 10 \quad x^4 - 4x^3 + 16x - 16]$$

   oraz $y = \mathbf{\Phi d}$ i funkcję wagową $w = \mathbf{\Phi c} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}$. Podstawiając te wszystkie zależności do (3) otrzymamy

$$\int_{-1}^{2} \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} \left(7\mathbf{\Phi}''\mathbf{d} + 3x\mathbf{\Phi d} - 24x - 4\right) \mathrm{d}x = 0$$

Równanie to ma być spełnione dla dowolnego $\mathbf{c} \neq 0$, oraz po podstawieniu konkretnych funkcji bazowych, przyjmie postać

$$\int_{-1}^{2} \begin{bmatrix} x^2+2x-8 \\ x^3-1.5x^2-6x+10 \\ x^4-4x^3+16x-16 \end{bmatrix} \Big\{ 7 \begin{bmatrix} 2 & 6x-3 & 12x^2-24x \end{bmatrix} \mathbf{d} +$$
$$+3x \begin{bmatrix} x^2+2x-8 & x^3-1.5x^2-6x+10 & x^4-4x^3+16x-16 \end{bmatrix} \mathbf{d} -$$
$$-24x-4 \Big\} \mathrm{d}x = 0$$

Dalej całkując i przekształcając otrzymamy układ równań

$$\begin{bmatrix} -276.300 & 382.436 & -706.146 \\ 382.436 & -697.757 & 1430.662 \\ -706.146 & 1430.663 & -3176.357 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -126.000 \\ 32.400 \\ 64.800 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie tego układu wynosi

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1.587 \\ 0.761 \\ -0.031 \end{bmatrix}$$

a ostateczne rozwiązanie ma postać $y(x) = 1.587 \cdot \Phi_1 + 0.761 \cdot \Phi_2 - 0.031 \cdot \Phi_3 = -0.031x^4 + 0.885x^3 + 0.445x^2 - 1.888x - 4.590$. Wracając teraz do równania wyjściowego $u(x) = y(x) + u_0(x) = -0.031x^4 + 0.885x^3 + 0.445x^2 + 1.112x - 12.590$.

3. Metoda kollokacji

W metodzie tej funkcją wagową jest $w = \delta(x - x_i)$ gdzie x_i jest punktem kollokacji. Punktów kollokacji dobieramy tyle ile jest funkcji bazowych i powinny one zawierać się w obszarze szukanego rozwiązania. Przyjmijmy $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ oraz $x_3 = \frac{5}{4}$.

Równanie (2) ma teraz postać

$$\int_{-1}^{2} \delta(x - x_i) R(x) \mathrm{d}x = R(x_i) = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3$$

czyli

$$R(x_i) = \left(7\mathbf{\Phi}(x_i)'' + 3x_i \mathbf{\Phi}(x_i)\right) \mathbf{d} - (24x_i + 4) = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3$$

dalej

$$R(x_1) = 0 \longrightarrow \Bigg\{ 7 \left[2 \quad 6 \cdot -\frac{1}{4} - 3 \quad 12 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 24 \cdot -\frac{1}{4} \right] +$$
$$+3 \cdot -\frac{1}{4} \cdot \left[\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 2 \cdot -\frac{1}{4} - 8 \quad \left(-\frac{1}{4}\right)^3 - 1.5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 6 \cdot -\frac{1}{4} + 10 \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \left(-\frac{1}{4}\right)^4 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^3 + 16 \cdot -\frac{1}{4} - 16 \right] \Bigg\} \mathbf{d} = 24 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 4$$

$$R(x_2) = 0 \longrightarrow \Bigg\{ 7 \begin{bmatrix} 2 & 6 \cdot \frac{1}{2} - 3 & 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 24 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 8 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1.5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} + 10 \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 16 \cdot \frac{1}{2} - 16 \right] \Bigg\} \mathbf{d} = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 4$$

$$R(x_3) = 0 \longrightarrow \Bigg\{ 7 \begin{bmatrix} 2 & 6 \cdot \frac{5}{4} - 3 & 12 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 24 \cdot \frac{5}{4} \end{bmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot \frac{5}{4} \cdot \left[\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{5}{4} - 8 \quad \left(\frac{5}{4}\right)^3 - 1.5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 6 \cdot \frac{5}{4} + 10 \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \left(\frac{5}{4}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3 + 16 \cdot \frac{5}{4} - 16 \right] \Bigg\} \mathbf{d} = 24 \cdot \left(\frac{5}{4}\right) + 4$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{bmatrix} 20.328 & -40.043 & 62.200 \\ 3.875 & 10.125 & -75.656 \\ -0.766 & 39.410 & -83.892 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 16 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań ma postać

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1.653 \\ 0.874 \\ -0.010 \end{bmatrix}$$

a szukana funkcja $u(x) = 1.653 \cdot \Phi_1 + 0.874 \cdot \Phi_2 - 0.010 \cdot \Phi_3 + u_0(x) = -0.010x^4 + 0.913x^3 + 0.342x^2 + 0.904x - 12.326$.

4. Metoda najmniejszych kwadratów

   W tej metodzie funkcja wagowa ma postać $w_i = \dfrac{\partial R}{\partial d_i}$.

   Residuum możemy zapisać jako

$$R = 7\boldsymbol{\Phi}''\mathbf{d} + 3x\boldsymbol{\Phi}\mathbf{d} - (24x + 4)$$

   stąd

$$w_i = \frac{\partial R}{\partial d_i} = 7\Phi_i'' + 3x\Phi_i$$

   czyli równanie (3) przyjmie postać

$$\int_{-1}^{2} \left(7\boldsymbol{\Phi}'' + 3x\boldsymbol{\Phi}\right)^{\mathrm{T}} \left(7\boldsymbol{\Phi}''\mathbf{d} + 3x\boldsymbol{\Phi}\mathbf{d} - (24x + 4)\right) \mathrm{d}x = 0$$

podstawiając za $\mathbf{\Phi}$ nasz wektor funkcji bazowych otrzymamy

$$\int\limits_{-1}^{2}\left\{\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 6x-3 \\ 12x^2-24x \end{bmatrix} + 3x\begin{bmatrix} x^2+2x-8 \\ x^3-1.5x^2-6x+10 \\ x^4-4x^3+16x-16 \end{bmatrix}\right\}\left\{\begin{bmatrix} 2 & 6x-3 & 12x^2-24x \end{bmatrix}\mathbf{d}+\right.\right.$$

$$\left.+3x\begin{bmatrix} x^2+2x-8 & x^3-1.5x^2-6x+10 & x^4-4x^3+16x-16 \end{bmatrix}\mathbf{d}-(24x+4)\right\}\mathrm{d}x=0$$

co po scałkowaniu i przekształceniach daje układ równań

$$\begin{bmatrix} 878.057 & -1698.396 & 4570.136 \\ -1698.396 & 6898.018 & -14967.643 \\ 4570.136 & -14967.643 & 41057.112 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -67.800 \\ 2826.900 \\ -5271.943 \end{bmatrix}$$

którego rozwiązaniem jest

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1.463 \\ 0.661 \\ -0.050 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie rozwiązanie ma postać $u(x) = 1.463 \cdot \Phi_1 + 0.661 \cdot \Phi_2 - 0.050 \cdot \Phi_3 + u_0(x) = -0.050x^4 + 0.862x^3 + 0.472x^2 + 1.156x - 12.291$.

Powyższe metody są metodami przybliżonymi. Jednakże jeżeli mamy doświadczenie w dobieraniu funkcji bazowych to w szczególnym przypadku możemy otrzymać nawet rozwiązanie ścisłe.

Metoda elementów skończonych w słabym sformułowaniu B-G

Zapiszemy problem (1) dla jednego elementu

$$\int\limits_{0}^{l^e} w^e(7u^{e\prime\prime} + 3(x^e + a^e)u^e)\mathrm{d}x^e = \int\limits_{0}^{l^e} w^e(9(x^e + a^e)^2 + 4)\mathrm{d}x^e$$

gdzie a^e jest przesunięciem elementowego lokalnego układu współrzędnych względem układu globalnego.

Pierwszy człon przecałkujemy przez części

$$7w^e u^{e\prime}\Big|_0^{l^e} + \int\limits_{0}^{l^e}(-7w^{e\prime}u^{e\prime} + 3(x^e + a^e)w^e u^e)\mathrm{d}x^e = \int\limits_{0}^{l^e} w^e(9(x^e + a^e)^2 + 4)\mathrm{d}x^e$$

Podstawiamy teraz za $u^e = \mathbf{N}^e\mathbf{d}^e$ i $w^e = \mathbf{N}^e\mathbf{c}^e = \mathbf{c}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}$ gdzie $\mathbf{N}^e$ są liniowymi funkcjami kształtu Lagrange'a ($\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{x^e}{l^e} & \dfrac{x^e}{l^e} \end{bmatrix}$) otrzymujemy

$$7\mathbf{c}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}u^{e\prime}\Big|_0^{l^e} + \int\limits_{0}^{l^e}(-7\mathbf{c}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\prime\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\prime}\mathbf{d}^e + 3(x^e + a^e)\mathbf{c}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^e\mathbf{d}^e)\mathrm{d}x^e =$$

$$= \int\limits_{0}^{l^e} \mathbf{c}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}(9(x^e + a^e)^2 + 4)\mathrm{d}x^e$$

dalej przekształcając

$$\mathbf{c}^{e\mathrm{T}}\left\{7\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}u^{e\prime}\Big|_0^{l^e} + \int\limits_0^{l^e}(-7\mathbf{N}^{e\prime\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\prime} + 3(x^e+a^e)\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^e)\mathbf{d}^e\mathrm{d}x^e - \int\limits_0^{l^e}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}(9(x^e+a^e)^2+4)\mathrm{d}x^e\right\} = 0$$

Równanie to jest spełnione dla dowolnego $\mathbf{c}^e$ i po przekształceniach przyjmie postać

$$\mathbf{K}^e\mathbf{d}^e = \mathbf{p}^e - \mathbf{p}_b^e$$

gdzie

$$\mathbf{K}^e = \int\limits_0^{l^e}(-7\mathbf{N}^{e\prime\mathrm{T}}\mathbf{N}^{e\prime} + 3(x^e+a^e)\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}\mathbf{N}^e)\mathrm{d}x^e$$

$$\mathbf{p}^e = \int\limits_0^{l^e}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}(9(x^e+a^e)^2+4)\mathrm{d}x^e$$

$$\mathbf{p}_b^e = 7\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}u^{e\prime}\Big|_0^{l^e}$$

Przyjmujemy trzy elementy skończone o równej długości $l^e = 1$. Dla poszczególnych elementów otrzymujemy macierze i wektory: ($\odot$ – nr węzła)

Element 1 $a^1 = -1$

$$\mathbf{K^1} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} ① & ② \end{array}$$
$$\mathbf{K^1} = \begin{bmatrix} -7.75 & 6.75 \\ 6.75 & -7.25 \end{bmatrix} \begin{array}{c} ① \\ ② \end{array}$$

$$\mathbf{p}^1 = \begin{bmatrix} 4.25 \\ 2.75 \end{bmatrix} \begin{array}{c} ① \\ ② \end{array}$$

$$\mathbf{p}_b^1 = 7\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^{1\prime}(l^1) - 7\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u^{1\prime}(0) = 7\begin{bmatrix} -u^{1\prime}(0) \\ u^{1\prime}(l^1) \end{bmatrix} \begin{array}{c} ① \\ ② \end{array}$$

Element 2 $a^2 = 0$

$$\mathbf{K^2} = \begin{bmatrix} -6.75 & 7.25 \\ 7.25 & -6.25 \end{bmatrix} \begin{array}{c} ② \\ ③ \end{array}$$

$$\mathbf{p}^2 = \begin{bmatrix} 2.75 \\ 4.25 \end{bmatrix} \begin{array}{c} ② \\ ③ \end{array}$$

$$\mathbf{p}_b^2 = 7\begin{bmatrix} -u^{2\prime}(0) \\ u^{2\prime}(l^2) \end{bmatrix} \begin{array}{c} ② \\ ③ \end{array}$$

Element 3 $a^3 = 1$

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{K^3} = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} ③ & ④ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -5.75 & 7.75 \\ 7.75 & -5.25 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ ③ \\ ④ \end{array}$$

$$\mathbf{p}^3 = \begin{bmatrix} 10.25 \\ 14.75 \end{bmatrix} \begin{array}{c} ③ \\ ④ \end{array}$$

$$\mathbf{p}_b^3 = 7 \begin{bmatrix} -u^{3\prime}(0) \\ u^{3\prime}(l^3) \end{bmatrix} \begin{array}{c} ③ \\ ④ \end{array}$$

Teraz przystępujemy do agregacji macierzy i wektorów

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{K} = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ① & ② & ③ & ④ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -7.75 & 6.75 & 0 & 0 \\ 6.75 & -14.00 & 7.25 & 0 \\ 0 & 7.25 & -12.00 & 7.75 \\ 0 & 0 & 7.75 & -5.25 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4.25 \\ 5.50 \\ 14.50 \\ 14.75 \end{bmatrix} \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}$$

$$\mathbf{p}_b = 7 \begin{bmatrix} -u^{1\prime}(0) = -u'(-1) \\ u^{1\prime}(l^1) - u^{2\prime}(0) = 0 \\ u^{2\prime}(l^2) - u^{3\prime}(0) = 0 \\ u^{3\prime}(l^3) = u'(2) \end{bmatrix} \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}$$

Stąd mamy układ równań

$$\begin{bmatrix} -7.75 & 6.75 & 0 & 0 \\ 6.75 & -14.00 & 7.25 & 0 \\ 0 & 7.25 & -12.00 & 7.75 \\ 0 & 0 & 7.75 & -5.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.25 \\ 5.50 \\ 14.50 \\ 14.75 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} -u'(-1) \\ 0 \\ 0 \\ u'(2) \end{bmatrix}$$

Uwzględniając teraz warunki brzegowe $u(0) = d_4 = -2$ oraz $u'(-1) = 3$ nasz układ równań przyjmie formę

$$\begin{bmatrix} -7.75 & 6.75 & 0 & 0 \\ 6.75 & -14.00 & 7.25 & 0 \\ 0 & 7.25 & -12.00 & 0 \\ 0 & 0 & 7.75 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ u'(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.25 - 7 \cdot (-3) \\ 5.50 \\ 14.50 \\ 14.75 \end{bmatrix} - (-2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.75 \\ -5.25 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie powyższego równia - niewiadome pierwotne $\mathbf{d}$ i niewiadome wtórne $\mathbf{p}_b$

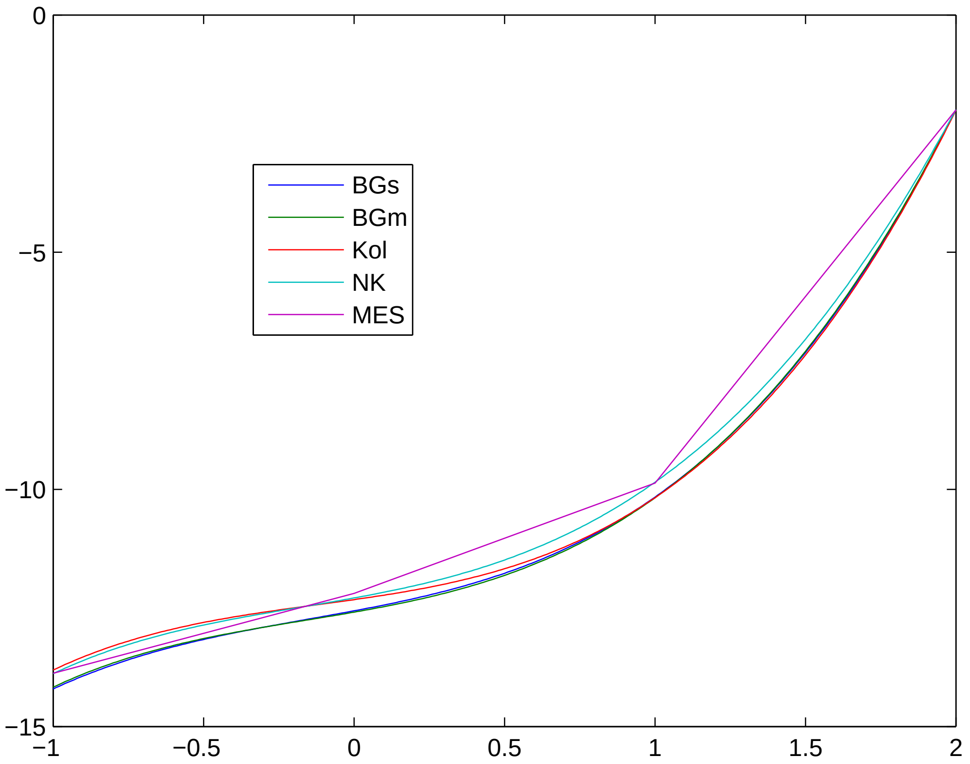
$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -13.8791 \\ -12.1946 \\ -9.8675 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_b = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 11.5319 \end{bmatrix}$$

Funkcje kształtu są liniowymi funkcjami Lagrange'a i rozwiązanie MES spełnia jedynie podstawowy warunek brzegowy (dla $u'(-1) = 1.6846 \neq 3$).

Spełnienie naturalnego warunku brzegowego wymagałoby przyjęcia funkcji kształtu Hermita. Zachowując funkcje kształtu Lagrange'a błąd rozwiązania dla pochodnej możemy zmniejszyć zwiększając liczbę elementów skończonych.

Porównanie wyników

Na rys.1 zamieszczono wykresy rozwiązań z poszczególnych metod.



Rysunek 1: Zestawienie wyników