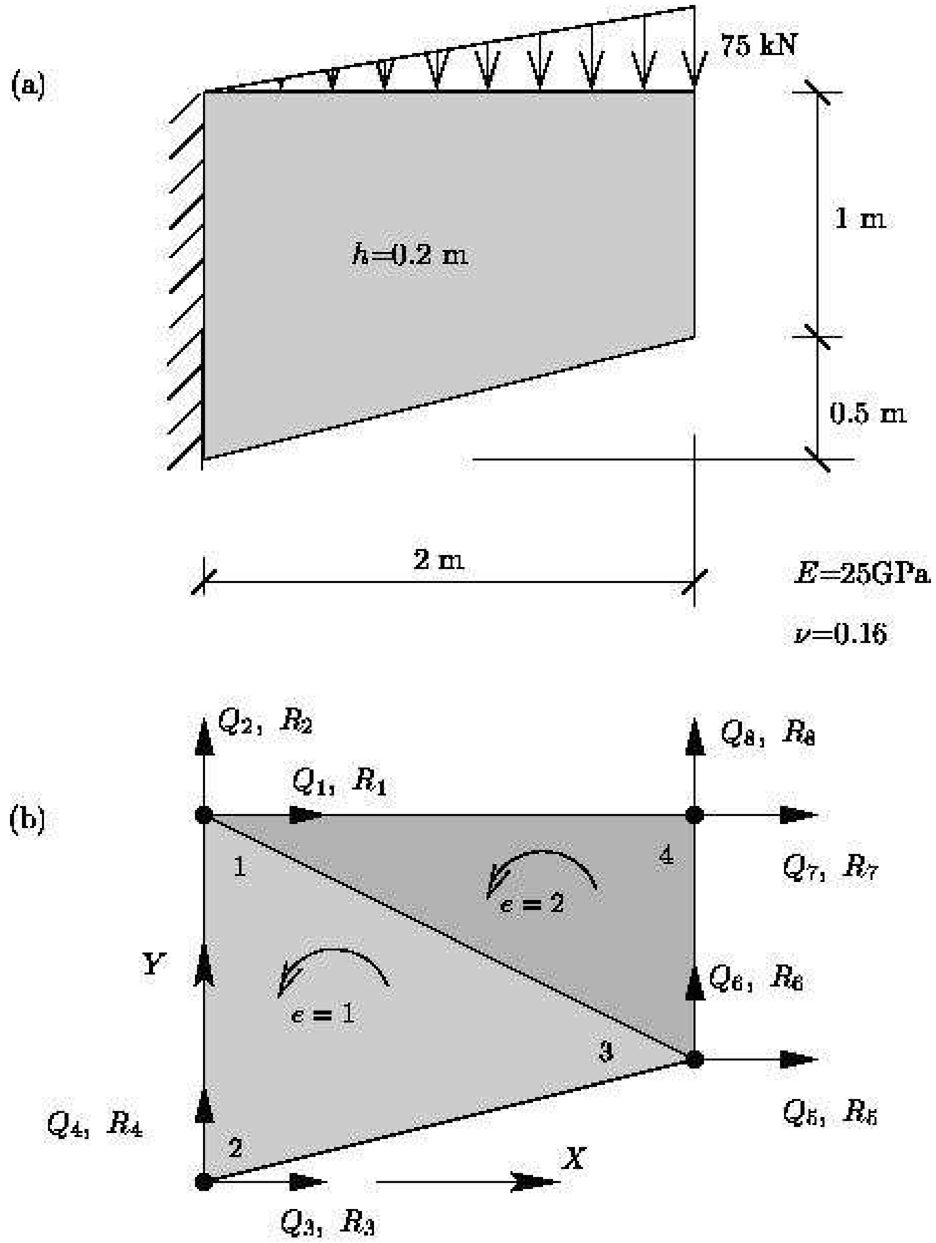

Rys.1. Tarcza (a) oraz jej model skończenie elementowy (b)

ORIGIN := 1

Stałe materiałowe

E := 25e6   v := 0.16   h := 0.2

$$wsp := \begin{pmatrix} 0 & 1.5 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0.5 \\ 2 & 1.5 \end{pmatrix} \qquad top := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Wzór na obliczenie pola elementów

$$F(e) := \begin{pmatrix} wsp_{top_{e,1},1} & wsp_{top_{e,1},2} & 1 \\ wsp_{top_{e,2},1} & wsp_{top_{e,2},2} & 1 \\ wsp_{top_{e,3},1} & wsp_{top_{e,3},2} & 1 \end{pmatrix} \qquad A(e) := \frac{1}{2} \cdot |F(e)|$$

Obliczenie modułu sprężystości

$$D := \frac{E}{\left(1 - v^2\right)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2.566 \times 10^7 & 4.105 \times 10^6 & 0 \\ 4.105 \times 10^6 & 2.566 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 1.078 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

Wyznaczenie funkcji kształtu

$$I := \text{identity}(3) \qquad C(e,i) := \left(F(e)^{-1}\right) \cdot I^{\langle i \rangle} \qquad N(e,i,x,y) := C(e,i)_1 \cdot x + C(e,i)_2 \cdot y + C(e,i)_3$$

e - nr elementu; i - nr funkcji kształtu

Element 1

$$N(1,1,x,y) \rightarrow -0.16666666666666666667 \cdot x + 0.66666666666666666667 \cdot y$$

$$N(1,2,x,y) \rightarrow -0.33333333333333333333 \cdot x + -0.66666666666666666667 \cdot y + 1$$

$$N(1,3,x,y) \rightarrow \frac{x}{2}$$

Element 2

$$N(2,1,x,y) \rightarrow 1 - \frac{x}{2}$$

$$N(2,2,x,y) \rightarrow -1.0 \cdot y + 1.5$$

$$N(2,3,x,y) \rightarrow 0.5 \cdot x + 1.0 \cdot y - 1.5$$

Macierz funkcji kształtu

$$N(e,x,y) := \begin{pmatrix} N(e,1,x,y) & 0 & N(e,2,x,y) & 0 & N(e,3,x,y) & 0 \\ 0 & N(e,1,x,y) & 0 & N(e,2,x,y) & 0 & N(e,3,x,y) \end{pmatrix}$$

Macierz pochodnych funkcji kształtu

$$B(e,x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}N(e,1,x,y) & 0 & \frac{d}{dx}N(e,2,x,y) & 0 & \frac{d}{dx}N(e,3,x,y) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy}N(e,1,x,y) & 0 & \frac{d}{dy}N(e,2,x,y) & 0 & \frac{d}{dy}N(e,3,x,y) \\ \frac{d}{dy}N(e,1,x,y) & \frac{d}{dx}N(e,1,x,y) & \frac{d}{dy}N(e,2,x,y) & \frac{d}{dx}N(e,2,x,y) & \frac{d}{dy}N(e,3,x,y) & \frac{d}{dx}N(e,3,x,y) \end{pmatrix}$$

$$A(1) = 1.5 \qquad A(2) = 1$$

$$B(1,0,0) = \begin{pmatrix} -0.167 & 0 & -0.333 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.667 & 0 & -0.667 & 0 & 0 \\ 0.667 & -0.167 & -0.667 & -0.333 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad B(2,0,0) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & -1 & 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Macierze sztywności

$$K(e) := B(e,0,0)^T \cdot D \cdot B(e,0,0) \cdot h \cdot A(e)$$

$$K(1) = \begin{pmatrix} 1.651\times10^{6} & -4.96\times10^{5} & -1.009\times10^{6} & -5.816\times10^{5} & -6.414\times10^{5} & 1.078\times10^{6} \\ -4.96\times10^{5} & 3.511\times10^{6} & 8.552\times10^{4} & -3.241\times10^{6} & 4.105\times10^{5} & -2.694\times10^{5} \\ -1.009\times10^{6} & 8.552\times10^{4} & 2.292\times10^{6} & 9.921\times10^{5} & -1.283\times10^{6} & -1.078\times10^{6} \\ -5.816\times10^{5} & -3.241\times10^{6} & 9.921\times10^{5} & 3.78\times10^{6} & -4.105\times10^{5} & -5.388\times10^{5} \\ -6.414\times10^{5} & 4.105\times10^{5} & -1.283\times10^{6} & -4.105\times10^{5} & 1.924\times10^{6} & 0 \\ 1.078\times10^{6} & -2.694\times10^{5} & -1.078\times10^{6} & -5.388\times10^{5} & 0 & 8.082\times10^{5} \end{pmatrix}$$

$$K(2) = \begin{pmatrix} 1.283\times10^{6} & 0 & 0 & 4.105\times10^{5} & -1.283\times10^{6} & -4.105\times10^{5} \\ 0 & 5.388\times10^{5} & 1.078\times10^{6} & 0 & -1.078\times10^{6} & -5.388\times10^{5} \\ 0 & 1.078\times10^{6} & 2.155\times10^{6} & 0 & -2.155\times10^{6} & -1.078\times10^{6} \\ 4.105\times10^{5} & 0 & 0 & 5.131\times10^{6} & -4.105\times10^{5} & -5.131\times10^{6} \\ -1.283\times10^{6} & -1.078\times10^{6} & -2.155\times10^{6} & -4.105\times10^{5} & 3.438\times10^{6} & 1.488\times10^{6} \\ -4.105\times10^{5} & -5.388\times10^{5} & -1.078\times10^{6} & -5.131\times10^{6} & 1.488\times10^{6} & 5.67\times10^{6} \end{pmatrix}$$

Macierze Boole'a

$$Bo(el) := \left| \begin{array}{l} Bo_{6,8} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} Bo_{i,2\cdot(top_{el,1}-1)+i} \leftarrow 1 \\ Bo_{i+2,2\cdot(top_{el,2}-1)+i} \leftarrow 1 \\ Bo_{i+4,2\cdot(top_{el,3}-1)+i} \leftarrow 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$Bo(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Bo(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Agregacja macierzy sztywności

$$K := Bo(1)^T \cdot K(1) \cdot Bo(1) + Bo(2)^T \cdot K(2) \cdot Bo(2)$$

$$K = \begin{pmatrix} 2.933\times10^{6} & -4.96\times10^{5} & -1.009\times10^{6} & -5.816\times10^{5} & -6.414\times10^{5} & 1.488\times10^{6} & -1.283\times10^{6} & -4.105\times10^{5} \\ -4.96\times10^{5} & 4.05\times10^{6} & 8.552\times10^{4} & -3.241\times10^{6} & 1.488\times10^{6} & -2.694\times10^{5} & -1.078\times10^{6} & -5.388\times10^{5} \\ -1.009\times10^{6} & 8.552\times10^{4} & 2.292\times10^{6} & 9.921\times10^{5} & -1.283\times10^{6} & -1.078\times10^{6} & 0 & 0 \\ -5.816\times10^{5} & -3.241\times10^{6} & 9.921\times10^{5} & 3.78\times10^{6} & -4.105\times10^{5} & -5.388\times10^{5} & 0 & 0 \\ -6.414\times10^{5} & 1.488\times10^{6} & -1.283\times10^{6} & -4.105\times10^{5} & 4.079\times10^{6} & 0 & -2.155\times10^{6} & -1.078\times10^{6} \\ 1.488\times10^{6} & -2.694\times10^{5} & -1.078\times10^{6} & -5.388\times10^{5} & 0 & 5.94\times10^{6} & -4.105\times10^{5} & -5.131\times10^{6} \\ -1.283\times10^{6} & -1.078\times10^{6} & 0 & 0 & -2.155\times10^{6} & -4.105\times10^{5} & 3.438\times10^{6} & 1.488\times10^{6} \\ -4.105\times10^{5} & -5.388\times10^{5} & 0 & 0 & -1.078\times10^{6} & -5.131\times10^{6} & 1.488\times10^{6} & 5.67\times10^{6} \end{pmatrix}$$

Wektor prawej strony - zastępniki

$$f\left(p1_x, p2_x, p1_y, p2_y, L, s\right) := \begin{bmatrix} p1_x\cdot\left(1-\frac{s}{L}\right) + p2_x\cdot\frac{s}{L} \\ p1_y\cdot\left(1-\frac{s}{L}\right) + p2_y\cdot\frac{s}{L} \end{bmatrix} \qquad F(s) := f(0,0,0,-75,2,s) \qquad F(s) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{75\cdot s}{2} \end{pmatrix}$$

Zastępnik dle elementu 2 - obciążenie wzdłuż osi x=s i dla y=1.5

$$i := 1..6$$

$$Z2_i := \int_0^2 \left(N(2,s,1.5)^T\cdot F(s)\right)_i ds \qquad Z2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{pmatrix} \qquad P := Bo(2)^T\cdot Z2 \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{pmatrix}$$

Warunki brzegowe - zablokowane nr stopni swobody

$$war := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$$i := 1..4 \quad I := identity(8) \quad Id_{8,8} := 0 \quad Id_{war_i, war_i} := 1 \quad Ip := I - Id \quad KK := Ip\cdot K\cdot Ip + Id \quad PP := Ip\cdot P$$

Rozwiązanie równania MES

$$Q := KK^{-1}\cdot PP$$

$$R := K\cdot Q - P$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8.182\times 10^{-6} \\ -5.213\times 10^{-5} \\ 1.529\times 10^{-5} \\ -6.156\times 10^{-5} \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -66.667 \\ 43.556 \\ 66.667 \\ 31.444 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6.395\times 10^{-14} \end{pmatrix}$$

Powrót do elementów

$$Q1 := Bo(1)\cdot Q \qquad Q2 := Bo(2)\cdot Q$$

$$Q1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8.182\times 10^{-6} \\ -5.213\times 10^{-5} \end{pmatrix} \qquad Q2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.182\times 10^{-6} \\ -5.213\times 10^{-5} \\ 1.529\times 10^{-5} \\ -6.156\times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1 := B(1,0,0)\cdot Q1$

$\varepsilon_2 := B(2,0,0)\cdot Q2$

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} -4.091\times10^{-6} \\ 0 \\ -2.606\times10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 7.646\times10^{-6} \\ -9.433\times10^{-6} \\ -7.306\times10^{-6} \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 := D\cdot\varepsilon_1$

$\sigma_2 := D\cdot\varepsilon_2$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} -104.964 \\ -16.794 \\ -280.851 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 157.446 \\ -210.638 \\ -78.723 \end{pmatrix}$$

Wartość przemieszczeń w środku ES

e - nr elementu
j - nr współrzędnej

$$X_s(e,j) := \frac{\sum_{i=1}^{3} wsp_{top_{e,i},j}}{3}$$

$X_s(1,1) = 0.667$

$X_s(1,2) = 0.667$

$X_s(2,1) = 1.333$

$X_s(2,2) = 1.167$

$U1 := N\left(1, X_s(1,1), X_s(1,2)\right)\cdot Q1$

$U2 := N\left(2, X_s(2,1), X_s(2,2)\right)\cdot Q2$

$$U1 = \begin{pmatrix} -2.727\times10^{-6} \\ -1.738\times10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$U2 = \begin{pmatrix} 2.37\times10^{-6} \\ -3.79\times10^{-5} \end{pmatrix}$$