ROZWIĄZANIE LINIOWEGO PROBLEMU BRZEGOWEGO DLA RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO RZĘDU DRUGIEGO METODĄ LINIOWEGO STRZAŁU (*ang. linear shooting method*)

1 Zamiana problemu brzegowego na dwa problemy początkowe

Problem z dwoma podstawowymi warunkami brzegowymi

Dany problem brzegowy

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) &= 0 \qquad x \in [a,b] \\ y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{aligned} \tag{1}$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie gdy funkcje $p(x), q(x)$ oraz $r(x)$ są ciągłe, oraz $q(x) < 0$ w zadanym przedziale. Rozwiązanie to wyznaczymy zamieniając wyjściowy problem brzegowy (1) na dwa problemy początkowe

W tym celu wykonamy podstawienie

$$y(x) = u(x) + cv(x) \tag{2}$$

otrzymując

$$u'' + p(x)u' + q(x)u + r(x) + c\left(v'' + p(x)v' + q(x)v\right) = 0$$

co można rozdzielić na dwa rówania

$$\begin{aligned} u'' + p(x)u' + q(x)u + r(x) &= 0 \\ v'' + p(x)v' + q(x)v &= 0 \end{aligned}$$

Wyjściowe warunki brzegowe przyjmują postać

$$\begin{aligned} y(a) &= \alpha = u(a) + cv(a) \\ y(b) &= \beta = u(b) + cv(b) \end{aligned}$$

Pierwszy warunek jest spełniony jeśli przyjmiemy $u(a) = \alpha$ i $v(a) = 0$. Z drugiego równania obliczymy współczynnik c

$$c = \frac{\beta - u(b)}{v(b)} \tag{3}$$

W efekcie równanie (2) ma postać

$$y(x) = u(x) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}\, v(x) \tag{4}$$

Z powyższego wzoru wynika, że $y(x)$ jest kombinacją liniową rozwiązań $u(x)$ i $v(x)$ z modułem (3). Pochodna $y'(x)$ w punkcie $x = a$ ma postać $y'(a) = u'(a) +$

$\dfrac{\beta - u(b)}{v(b)} v'(a)$ co po przekształeceniach prowadzi do zależności $\dfrac{v'(a)}{v(b)} = \dfrac{y'(a) - u'(a)}{y(b) - u(b)} =$ const. Wartości $u(b)$ i $v(b)$ ściśle zależą od warunków początkowych odpowiednio $u'(a)$ i $v'(a)$ co w rezultacie daje $y'(a) =$ const dla dowolnie przyjętych warunków początkowych $u'(a)$ i $v'(a) \neq 0$ Na przykład przyjmiemy $u'(a) = 0$ oraz $v'(a) = 1$. Ostatecznie zamiast rozwiązywać problem brzegowy (1) rozwiązywać będziemy dwa problemy początkowe

$$\begin{aligned} u'' + p(x)u' + q(x)u + r(x) &= 0 \qquad x \in [a, b] \\ u(a) &= \alpha \\ u'(a) &= 0 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} v'' + p(x)v' + q(x)v &= 0 \qquad x \in [a, b] \\ v(a) &= 0 \\ v'(a) &= 1 \end{aligned}$$

Ostatecznie $y(x)$ obliczymy ze wzoru (4).

Problem z podstawowym i naturalnym warunkiem brzegowym

Analogicznie jak poprzednio problem brzegowy

$$\begin{gathered} y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0 \qquad x \in [a, b] \\ \begin{array}{c|c} y(a) = \alpha & y'(a) = \alpha \\ y'(b) = \beta & y(b) = \beta \end{array} \end{gathered} \tag{5}$$

zamieniamy na dwa problemy początkowe

$$\begin{gathered} u'' + p(x)u' + q(x)u + r(x) = 0 \qquad x \in [a, b] \\ \begin{array}{c|c} u(b) = 0 & u(a) = 0 \\ u'(b) = \beta & u'(a) = \alpha \end{array} \end{gathered}$$

oraz

$$\begin{gathered} v'' + p(x)v' + q(x)v = 0 \qquad x \in [a, b] \\ \begin{array}{c|c} v(b) = 1 & v(a) = 1 \\ v'(b) = 0 & v'(a) = 0 \end{array} \end{gathered}$$

W tym przypadku rozwiąznie problemu brzegowego (5) ma postać

$$y(x) = u(x) + \frac{\alpha - u(a)}{v(a)} v(x) \qquad \Big| \qquad y(x) = u(x) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)} v(x) \tag{6}$$

2 Numeryczne rozwiązanie problemu początkowego

Problem początkowy rzędu drugiego

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) &= 0 \qquad x \in [a, b] \\ y(a) &= A \\ y'(a) &= B \end{aligned}$$

zamieniamy na układ dwóch równań różniczkowych rzędu pierwszego (postać standardowa) podstawiając $y_1 = y$ oraz $y_2 = y'$

$$\begin{cases} y_1' = F_1(y_1, y_2, x) & \text{z war. pocz.} \quad y_1(a) = A \\ y_2' = F_2(y_1, y_2, x) & \text{z war. pocz.} \quad y_2(a) = B \end{cases}$$

gdzie przyjęto oznaczenia $F_1(y_1, y_2, x) = y_2$ oraz $F_2(y_1, y_2, x) = -p(x)y_2 - q(x)y_1 - r(x)$. Powyższy układ równań można rozwiązać jedną z metod poznanych w przedmiocie Metody Numeryczne.

3 Funkcja MATHCADa do rozwiązywania problemów początkowych dla równań różniczkowych zwyczajnych

Funkcja rkfixed rozwiązuje problem początkowy wykorzystując metodę Runge-Kutty IV rzędu

$$W := \text{rkfixed}(v_0, a, b, N, F)$$

gdzie

- v_0 — wektor kolumnowy warunków początkowych $\left(\text{np. } \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right)$;
- a — początek przedziału;
- b — koniec przedziału;
- N — liczba podziału przedziału;
- F — wektor z danym układem równań $\left(\text{np. } \begin{bmatrix} F_1(v_1, v_2, x) \\ F_2(v_1, v_2, x) \end{bmatrix}\right)$;
- W — macierz rozwiązania gdzie pierwsza kolumna ($W^{<1>}$) to wartości x, druga wartości $v_1 = y$, a trzecia $v_2 = y'$.

4 Przykład

Rozwiążemy problem brzegowy

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' + x^2 y - 2 + 6x^2 - x^4 = 0 \qquad & x \in [0, 3] \\ y(0) = -2 \\ y'(3) = 6 \end{aligned}$$

Zamieniamy ten problem na dwa problemy początkowe:

$$\begin{aligned} u'' - 2xu' + x^2 u - 2 + 6x^2 - x^4 = 0 \qquad & x \in [0, 3] \\ u(3) = 0 \\ u'(3) = 6 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} v'' - 2xv' + x^2 v &= 0 \qquad\qquad x \in [0,3] \\ v(3) &= 1 \\ v'(3) &= 0 \end{aligned}$$

By użyć funkcji MATHCADa należy zamienić te równania na układy równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} u_1' = u_2 & \text{z war. pocz.} \quad u_1(3) = 0 \\ u_2' = 2xu_2 - x^2 u_1 + 2 - 6x^2 + x^4 & \text{z war. pocz.} \quad u_2(3) = 6 \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} v_1' = v_2 & \text{z war. pocz.} \quad v_1(3) = 1 \\ v_2' = 2xv_2 - x^2 v_1 & \text{z war. pocz.} \quad v_2(3) = 0 \end{cases}$$

a następnie je rozwiązać.

W zapisie MATHCADa ma to postać (ORIGIN := 1, przy założeniu liczby podziału przedziału N := 100)

$$\mathtt{Fu}(\mathtt{x},\mathtt{u}) := \begin{bmatrix} \mathtt{u}_2 \\ 2 \cdot \mathtt{x} \cdot \mathtt{u}_2 - \mathtt{x}^2 \cdot \mathtt{u}_1 + 2 - 6 \cdot \mathtt{x}^2 + \mathtt{x}^4 \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{Wu} := \mathrm{rkfixed}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}, 3, 0, 100, \mathtt{Fu}\right)$$

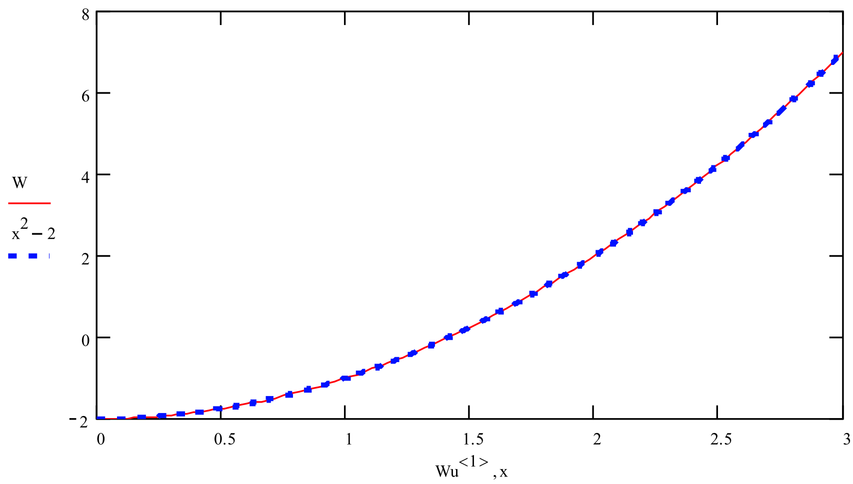
$$\mathtt{Fv}(\mathtt{x},\mathtt{v}) := \begin{bmatrix} \mathtt{v}_2 \\ 2 \cdot \mathtt{x} \cdot \mathtt{v}_2 - \mathtt{x}^2 \cdot \mathtt{v}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{Wv} := \mathrm{rkfixed}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, 3, 0, 100, \mathtt{Fv}\right)$$

Wykorzystując teraz wzór $(6)_1$ mamy:

$$\mathtt{W} := \mathtt{Wu}^{\langle 2\rangle} + \frac{-2 - \mathtt{Wu}_{101,2}}{\mathtt{Wv}_{101,2}} \cdot \mathtt{Wv}^{\langle 2\rangle}$$

Rozwiązanie dokładne wynosi $y(x) = x^2 - 2$, a porównanie wyników znajduje się na Rys.1.



Rysunek 1: Porównanie wyników