

Sformułowanie silne - model lokalny

$$Ay''(x) + C(x)y(x) = D(x)$$

+ (przykładowe) warunki brzegowe

- $y(x_a) = \hat{a}$ – podstawowy warunek brzegowy (Dirichleta)
- $y'(x_b) = \hat{b}$ – naturalny warunek brzegowy (Neumanna)

Słabe sformułowanie - model globalny ($\forall w \neq 0$)

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x) \left(Ay^{h''}(x) + C(x)y^h(x) - D(x) \right) dx = 0$$

$$\int_{x_a}^{x_b} w(x) Ay^{h''}(x) dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x) C(x) y^h(x) dx - \int_{x_a}^{x_b} w(x) D(x) dx = 0$$

$$w(x) Ay^{h'}(x) \Big|_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} w'(x) Ay^{h'}(x) dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x) C(x) y^h(x) dx - \int_{x_a}^{x_b} w(x) D(x) dx = 0$$

$$w(x_b) A \hat{b} - w(x_a) Ay^{h'}(x_a) - \int_{x_a}^{x_b} w'(x) Ay^{h'}(x) dx + y^{h'}(x) dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x) C(x) y^h(x) dx - \int_{x_a}^{x_b} w(x) D(x) dx = 0$$

$$w(x_b) A \hat{b} - w(x_a) Ay^{h'}(x_a) - \int_{x_a}^{x_b} w'(x) Ay^{h'}(x) dx + \int_{x_a}^{x_b} w(x) C(x) y^h(x) dx - \int_{x_a}^{x_b} w(x) D(x) dx = 0$$

$$L(y^h, w) - l(w) = 0$$

+ podstawowy warunek brzegowy

- $y(x_a) = \hat{a}$

Estymator błędu

$$e^e(x^e) = |y_{h,p}^e(x^e) - y_{por}^e(x^e)|$$

gdzie: e – element, $y_{h,p}^e$ – rozwiązanie MES, h – moduł siatki, p – rząd aproksymacji
 y_{por}^e – rozwiązanie ścisłe lub odniesienia.

Wskaźnik (indykator błędu)

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{|l|} \sum_e L(e, e)}$$

Linowe funkcje kształtu 1D

$$\mathbf{N}^e(x^e) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} & \frac{x^e}{l^e} \end{bmatrix}$$

Hierarchiczne kwadratowe funkcje kształtu 1D

$$\mathbf{N}^e(x^e) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} & \frac{x^e}{l^e} & x^e(x^e - l^e) \end{bmatrix}$$

Hierarchiczne kubyczne funkcje kształtu 1D

$$\mathbf{N}^e(x^e) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^e}{l^e} & \frac{x^e}{l^e} & x^e(x^e - l^e) & x^e(x^e - l^e)(2x^e - l^e) \end{bmatrix}$$

Własności funkcji kształtu 2D

$$N_i(x_i, y_i) = 1, \quad N_i(x_j, y_j) = 0 \quad \text{dla } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \text{gdzie } n - \text{liczba węzłów}$$

Funkcje bazowe w ES trójwęzłowym $\Phi = [1, x, y]$ a w czterowęzłowym $\Phi = [1, x, y, xy]$

Przemieszczenia PSO

$$\mathbf{u}^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y) \bar{\mathbf{d}}^e \quad \text{gdzie } \mathbf{u}^e(x, y) = \{u^e(x, y), v^e(x, y)\}, \quad \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & \cdots & N_n^e & 0 \\ 0 & N_1^e & \cdots & 0 & N_n^e \end{bmatrix}$$

Odształcenia PSO: $\varepsilon_z = 0$

$$\mathbf{e}^e(x, y) = \mathbf{L} \mathbf{u}^e(x, y) = \mathbf{B}^e(x, y) \bar{\mathbf{d}}^e \quad \text{gdzie } \mathbf{B}^e(x, y) = \mathbf{L} \mathbf{N}^e(x, y)$$

$$\mathbf{e}^e(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^e(x, y) \\ \varepsilon_y^e(x, y) \\ \gamma_{xy}^e(x, y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Naprężenia PSO: $\sigma_z^e = \nu(\sigma_x^e + \sigma_y^e)$

$$\mathbf{s}^e(x, y) = \mathbf{D} \mathbf{e}^e(x, y) \quad \text{gdzie } \mathbf{s}^e(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_x^e(x, y) \\ \sigma_y^e(x, y) \\ \tau_{xy}^e(x, y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności i wektor sił brzegowych (równoważniki obciążenia) PSO

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA^e, \quad \bar{\mathbf{p}}_b^e = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^e d\Gamma^e \quad \text{gdzie } \mathbf{t}^e = \begin{bmatrix} t_x^e \\ t_y^e \end{bmatrix}$$

Rozwinięcie w szereg Taylora

- dla 1D: $u_j = u_i + h u'_i + \frac{1}{2} h^2 u''_i + \frac{1}{6} h^3 u'''_i + \dots + \frac{1}{n!} h^n u_i^{(n)} + \dots$ gdzie $h = x_j - x_i$
- dla 2D: $u_{lm} = u_{ij} + h \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + k \frac{\partial u_{ij}}{\partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} + h k \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial y^2} + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n u_{ij} + \dots$ gdzie $h = x_l - x_i, k = y_m - y_j$

Wzory różnicowe - klasyczny MRS

- Pierwsza pochodna centralna $\left\{ \begin{array}{c} \text{---} (-1) \text{---} h \text{---} \textcircled{0} \text{---} h \text{---} (1) \text{---} \end{array} \right\} \cdot \frac{1}{2h}$

- Druga pochodna $\left\{ \begin{array}{c} \text{---} (1) \text{---} h \text{---} \textcircled{-2} \text{---} h \text{---} (1) \text{---} \end{array} \right\} \cdot \frac{1}{h^2}$

- Laplasjan $\left\{ \begin{array}{c} \text{---} (1) \text{---} h \text{---} \textcircled{-4} \text{---} h \text{---} (1) \text{---} \\ \text{---} h \text{---} \textcircled{-4} \text{---} h \text{---} \\ \text{---} h \text{---} \textcircled{-4} \text{---} h \text{---} \end{array} \right\} \cdot \frac{1}{h^2}$

Aproksymacja MWLS 1D

- Aproksymacja lokalna

$$J = \sum_{s=0}^m \sum_{j=1}^{n_s} \left[\left(\overbrace{\left(\sum_{i=s}^p \frac{h_j^{i-s}}{(i-s)!} u_0^{(i)} - u_j^{(s)} \right)}^{\bar{u}_j^{(s)}} \right)^2 \left(\frac{1}{h_j^{1+p-s}} \right)^2 \right]$$

gdzie

- p – stopień aproksymacji
- j – numer węzła dla którego zastosowano rozwinięcie w szereg Taylora
- s – typ uogólnionego stopnia swobody, np. $s = 0 \Rightarrow u_j$, $s = 1 \Rightarrow u'_j$
- m – liczba typów uogólnionych stopni swobody, np. $m = 0 \Rightarrow u_j$; $m = 1 \Rightarrow u_j, u'_j$.
- $n_s = [n_0, n_1, \dots, n_m]$ – liczba stopni swobody danego typu dla których zastosowano rozwinięcie

w szereg Taylora, np. $\begin{array}{c} u_1, u'_1 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{u_0} \begin{array}{c} u_2 \\ \circ \end{array}$ lub $\begin{array}{c} u_1, u'_1 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{0} \begin{array}{c} u_2 \\ \circ \end{array}$ $n_0 = 2, n_1 = 1$

- Minimalizacja błędu

$$\frac{\partial J}{\partial u_0^{(t)}} = 0$$

gdzie: $u_0^{(t)} = \frac{d^t u}{dx^t}$ – poszukiwane pochodne t w węźle/punkcie x_0

Macierz sztywności dla elementu ramowego

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e$$

Macierz mas dla elementu ramowego

$$\bar{\mathbf{M}}^e = \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{\mu l}{3} & 0 & 0 & \frac{\mu l}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13\mu l}{35} & \frac{11\mu l^2}{210} & 0 & \frac{9\mu l}{70} & -\frac{13\mu l^2}{420} \\ 0 & \frac{11\mu l^2}{210} & \frac{\mu l^3}{105} & 0 & \frac{13\mu l^2}{420} & -\frac{\mu l^3}{140} \\ \frac{\mu l}{6} & 0 & 0 & \frac{\mu l}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9\mu l}{70} & \frac{13\mu l^2}{420} & 0 & \frac{13\mu l}{35} & -\frac{11\mu l^2}{210} \\ 0 & -\frac{13\mu l^2}{420} & -\frac{\mu l^3}{140} & 0 & -\frac{11\mu l^2}{210} & \frac{\mu l^3}{105} \end{bmatrix}^e$$

Macierz sztywności po transformacji do układu globalnego $\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}^e$
($c = \cos(\alpha^e)$ i $s = \sin(\alpha^e)$)

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} c^2 \bar{K}_{11}^e + s^2 \bar{K}_{22}^e & cs(\bar{K}_{11}^e - \bar{K}_{22}^e) & -s \bar{K}_{23}^e & c^2 \bar{K}_{14}^e + s^2 \bar{K}_{25}^e & cs(\bar{K}_{14}^e - \bar{K}_{25}^e) & -s \bar{K}_{26}^e \\ cs(\bar{K}_{11}^e - \bar{K}_{22}^e) & s^2 \bar{K}_{11}^e + c^2 \bar{K}_{22}^e & c \bar{K}_{23}^e & cs(\bar{K}_{14}^e - \bar{K}_{25}^e) & s^2 \bar{K}_{14}^e + c^2 \bar{K}_{25}^e & c \bar{K}_{26}^e \\ -s \bar{K}_{32}^e & c \bar{K}_{32}^e & \bar{K}_{33}^e & -s \bar{K}_{35}^e & c \bar{K}_{35}^e & \bar{K}_{36}^e \\ c^2 \bar{K}_{41}^e + s^2 \bar{K}_{52}^e & cs(\bar{K}_{41}^e - \bar{K}_{52}^e) & -s \bar{K}_{53}^e & c^2 \bar{K}_{44}^e + s^2 \bar{K}_{55}^e & cs(\bar{K}_{44}^e - \bar{K}_{55}^e) & -s \bar{K}_{56}^e \\ cs(\bar{K}_{41}^e - \bar{K}_{52}^e) & s^2 \bar{K}_{41}^e + c^2 \bar{K}_{52}^e & c \bar{K}_{53}^e & cs(\bar{K}_{44}^e - \bar{K}_{55}^e) & s^2 \bar{K}_{44}^e + c^2 \bar{K}_{55}^e & c \bar{K}_{56}^e \\ -s \bar{K}_{62}^e & c \bar{K}_{62}^e & \bar{K}_{63}^e & -s \bar{K}_{65}^e & c \bar{K}_{65}^e & \bar{K}_{66}^e \end{bmatrix}$$