Zadanie 1. Rozwiązać poniższy problem brzegowy metodą MES przyjmując podział dziedziny zadania na dwa elementy skończone o liniowej interpolacji.

$$-3y''(x) + 4y(x) = 2x^2 + 8x + 9, \qquad y(-2) = 1, \qquad y'(2) = 4$$

Wyznaczyć estymator oraz wskaźnik błędu przyjmujac rozwiązanie ścisłe $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$.

Zadanie 2. Rozwiązać problem brzegowy z zadania 2 metodą MES przyjmując 2ES z kwadratowymi hierarchicznymi funkcjami kształtu.

Zadanie 3. Poniższy problem brzegowy

$$y''(x) + 4y(x) = 2x^3 + 11x - 12, \qquad y(0) = -3, \qquad y'(1) = 3.5$$

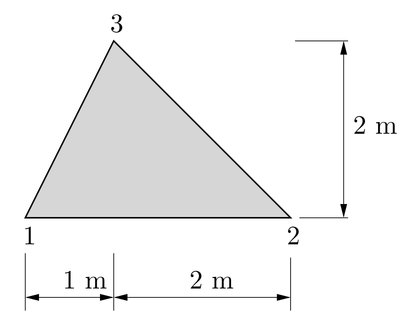
rozwiązano MES dyskretyzując dziedzinę jednym elementem skończonym z liniowymi funkcjami kształtu i otrzymano wektor stopni swobody $\mathbf{d} = \{-3, 0.2\}$. Wyznaczyć estymator oraz wskaźnik błędu przyjmujac rozwiązanie ścisłe $y(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x - 3$.

Zadanie 4. Poniższy problem brzegowy

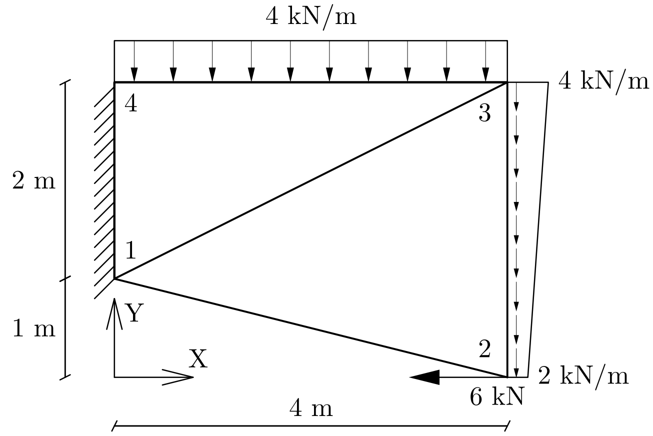
$$y''(x) + 4y(x) = 2x^2 - 8x - 1, \qquad y(0) = -0.5, \qquad y'(1) = -1$$

rozwiązano MES dyskretyzując dziedzinę jednym elementem skończonym z hierarchicznymi funkcjami kształtu $\mathbf{N} = [1 - \frac{x}{l},\ \frac{x}{l},\ x(x-l)]$ i otrzymano wektor stopni swobody $\mathbf{d} = \{-0.5, -2, 0.5\}$. Wyznaczyć estymator oraz wskaźnik błędu przyjmujac rozwiązanie ścisłe $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 0.5$.

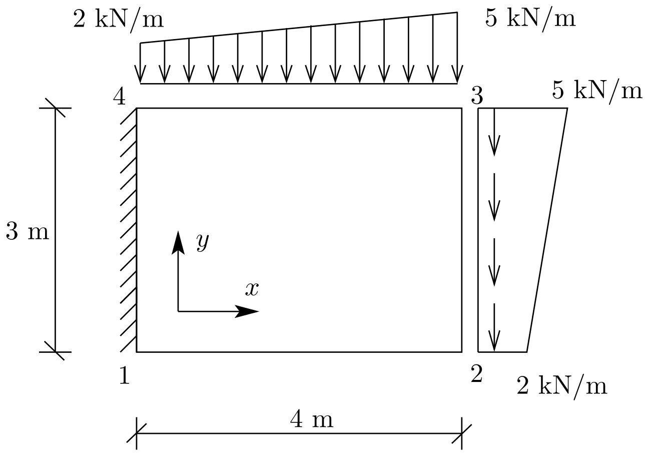
Zadanie 5. Wyprowadzić funkcje kształtu dla dwuwymiarowego elementu skończonego



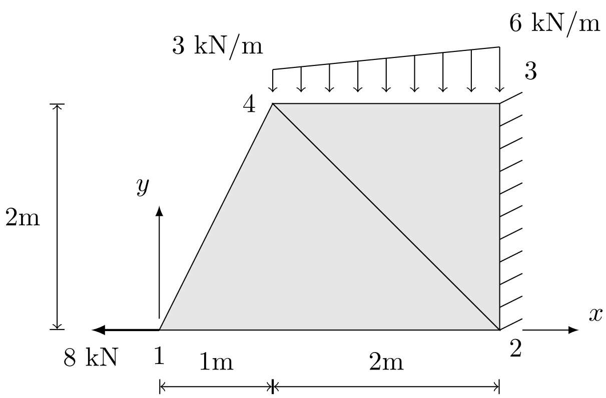
Zadanie 6. Zapisać wektor prawej strony równania MES dla podanego układu 2D.



Zadanie 7. Dla danego ukladu 2D zapisać wektor prawej strony równania MES.

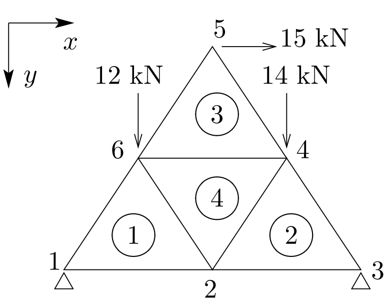


Zadanie 8. Dla podanego układu 2D (PSO) zdysketyzowanego elementami skończonymi zapisać wektor obciążenia (prawej strony układu równań) MES, przed uwzględnieniem i po uwzględnieniu warunków brzegowych.



$E = 26$ GPa
$\nu = 0.2$

Zadanie 9. Przedstawić graficznie proces agregacji macierzy sztywności dla elementów 1 i 4 w poniższego układu 2D.

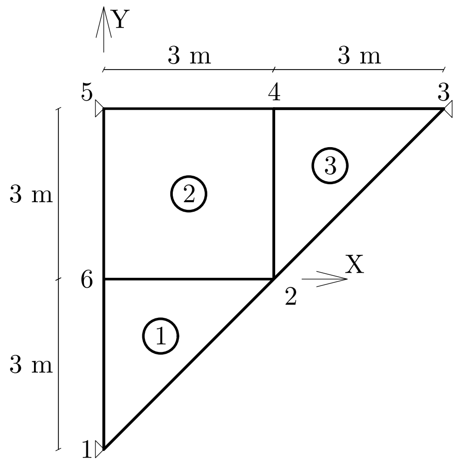


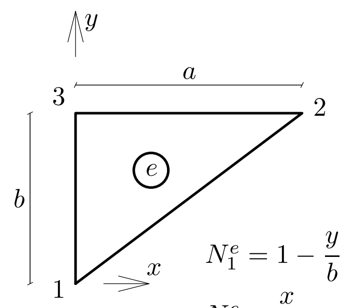
element	węzly		
1	1	2	6
2	2	3	4
3	4	5	6
4	2	4	6

Zapisać globalny wektor **F** prawej strony równania MES.

Zadanie 10. Dla elementu 3 wyznaczyć składowe przemieszczenia u_x i u_y oraz wektor odkształceń $\boldsymbol{\epsilon}$ w punkcie o współrzędnych X=4 Y=2 przy założeniu płaskiego stanu naprężenia. Globalny wektor przemieszczeń ma postać:

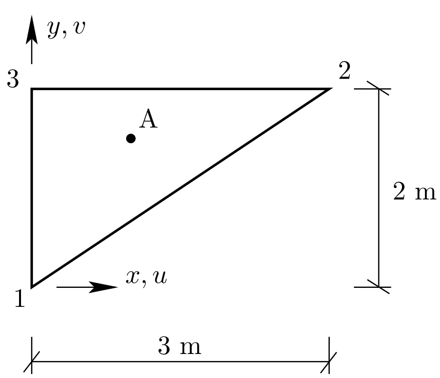
$$\mathbf{d} = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right\} \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}$$





$$N_1^e = 1 - \frac{y}{b}$$
$$N_2^e = \frac{x}{a}$$
$$N_3^e = \frac{y}{b} - \frac{x}{a}$$

Zadanie 11. Obilczyć metodą elementów skończonych wektory odkształcenia $\boldsymbol{\epsilon}$ i naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ oraz przemieszczenie pionowe w punkcie A – $v_A(1.0, 1.5)$ dla układu 2D w PSOzdyskretyzowanej jednym elementem skończonym i z danym wektorem stopni swobody $\mathbf{d}$.

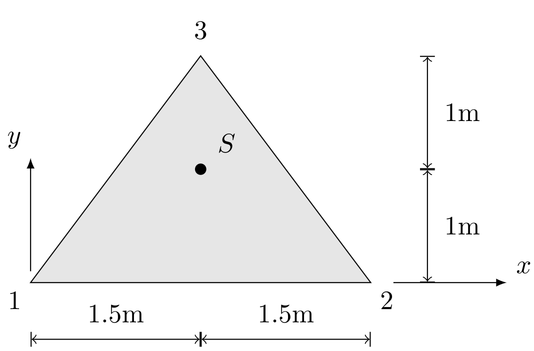


$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.01 \\ -0.02 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{m}$$

$$N_1(x,y) = -\frac{1}{2}y + 1$$
$$N_2(x,y) = \frac{1}{3}x$$
$$N_3(x,y) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y$$

$E = 26\mathrm{GPa}$
$\nu = 0.3$

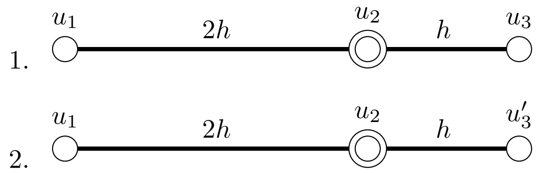
Zadanie 12. Wyznaczyć za pomocą Metody Elementów Skończonych wektor naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$ oraz obliczyć wektor przemieszczeń $\mathbf{u}$ w punkcie S dla trójkątnego układu 2D zdyskretyzowanego jednym elementem skończonym i z danym wektorem stopni swobody $\mathbf{d}$. Układ ten wykonany jest z materiału izotropowego o module Younga $E = 24$ GPa oraz $\nu = 0.2$.



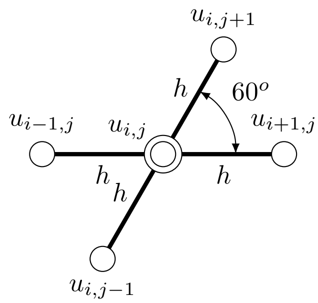
$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}$$

$N_1(x,y) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y$
$N_2(x,y) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y$
$N_3(x,y) = \frac{1}{2}y$

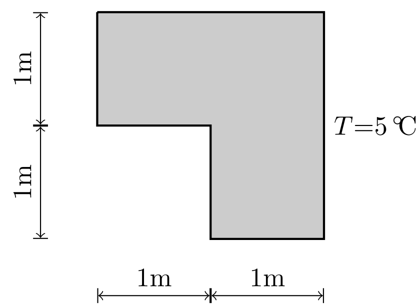
Zadanie 13. Wygenerować operator różnicowy na pierwszą pochodną w węźle 2 dla zadanej gwiazdy i dla dwóch zestawów danych jak na rysunkach:



Zadanie 14. Wygenerować operator Laplace'a dla gwiazdy, jak na rysunku poniżej:

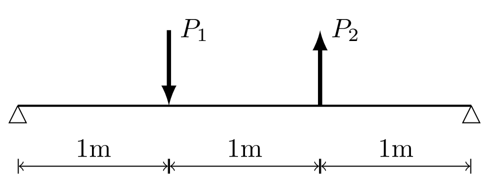


Zadanie 15. Zapisać układ równań algebraicznych dla zadania przepływu ciepła (przyjąć k=7 [J/ ℃ms] , $f(x, y)$=$x - y$ [J/m^{2}s] i moduł siatki h=0.5 [m]) dla obszaru z rysunku poniżej



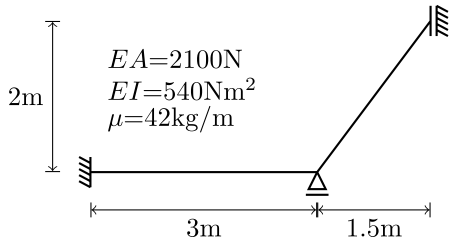
Zadanie 16. Wygenerować operatory różnicowe z zadania 13 za pomocą MWLS. Przyjąć lokalną aproksymację stopnia pierwszego.

Zadanie 17. Zapisać układ równań algebraicznych dla zadania ugięcia belki (przyjąć EI=c i moduł siatki h=0.5 [m]) dla belki z rysunku poniżej



UWAGA: Równanie ugiecia belki $\dfrac{\mathrm{d}^4 v(x)}{\mathrm{d}x^4} = \dfrac{p(x)}{EJ}$ lub $\dfrac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{M(x)}{EJ}$, $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 M(x)}{\mathrm{d}x^2} = -p(x)\right)$.

Zadanie 18. Dla zadanej ramy wyznaczyć częstości i postacie drgań własnych.



$$\mathbf{k}^e = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}^e$$

$$\mathbf{m}^e = \frac{\mu l}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}^e$$