

Matematyka stosowana i metody numeryczne

Konspekt z wykładu

5 Interpolacja

Interpolacja polega na budowaniu tzw. funkcji interpolujących $\varphi(x)$ na podstawie zadanych wartości $f(x)$ zapamiętanych w postaci dyskretnej. Postać dyskretną tworzą dwa zbiory liczbowe:

- węzły interpolacji:

$$\mathbf{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

- wartości funkcji interpolowanej (odpowiadające tym węzłom):

$$\mathbf{F} = \{f_0, f_1, \dots, f_n\}$$

gdzie: $f_i \equiv f(x_i)$.

Obie funkcje, interpolowana $f(x)$ i interpolująca $\varphi(x)$, mają na zbiorze węzłów $\mathbf{X}$ dokładnie takie same wartości liczbowe.

Są zatem spełnione warunki:

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

na podstawie których konstruuje się funkcję interpolującą $\varphi(x_i)$.

Funkcja $\varphi(x_i)$ w przypadku ogólnym jest przedstawiana najczęściej w postaci wielomianu uogólnionego:

$$\varphi(x) = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + \dots + a_n \phi_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i \phi_i(x) = \mathbf{\Phi}(x) \mathbf{a}, \quad (1)$$

utworzonego z odpowiednio dobranych tzw. funkcji bazowych $\mathbf{\Phi}(x) = [\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)]$ i wektora współczynników (mnożników) $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$. W celu utworzenia konkretnej funkcji interpolującej $\varphi(x)$ należy:

- przyjąć odpowiednią bazę $\mathbf{\Phi}(x)$,
- wyznaczyć wartości liczbowe wszystkich jej współczynników $a_i, i = 0, 1, \dots, n$,
- sformułować wielomian $\varphi(x_i)$.

Przykład: Zbudować uogólniony wielomian interpolacyjny o postaci

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \cos x + a_3 \sin x$$

- Węzły interpolacji: $\mathbf{X} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{0, 1.5, 3, 4\}$.
- Wartości funkcji: $\mathbf{F} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\} = \{2, 3, 1, 3\}$.
- Baza interpolacyjna: $\Phi(x) = [1, x, \cos x, \sin x]$.

Rozwiązanie:

Budujemy macierz $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cos x_0 & \sin x_0 \\ 1 & x_1 & \cos x_1 & \sin x_1 \\ 1 & x_2 & \cos x_2 & \sin x_2 \\ 1 & x_3 & \cos x_3 & \sin x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0 & 1.00000 & 0.00000 \\ 1 & 1.5 & 0.07074 & 0.99749 \\ 1 & 3.0 & -0.98999 & 0.14112 \\ 1 & 4.0 & -0.65364 & -0.75680 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy układ równań $\mathbf{U} \mathbf{a} = \mathbf{f}$, którego rozwiązanie pozwala zapisać poszukiwany wielomian w postaci:

$$\varphi(x) = \Phi(x) \mathbf{a} = [1, x, \cos x, \sin x] \begin{bmatrix} -1.6210 \\ 2.0046 \\ 3.6210 \\ 1.3615 \end{bmatrix}$$

5.1 Interpolacja wielomianowa (algebraiczna)

Przyjmujemy bazę jednomianową:

$$\Phi(x) = [1, x, x^2, x^3, \dots, x^n]$$

i budujemy wielomianową funkcję interpolującą:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n. \quad (2)$$

5.2 Interpolacja Lagrange'a

Przyjmujemy postać funkcji interpolującej stopnia n jako tzw. wielomian interpolacyjny Lagrange'a:

$$\varphi(x) = f_0 L_0^n(x) + f_1 L_1^n(x) + \dots + f_n L_n^n(x). \quad (3)$$

gdzie f_i ($i = 0, 1, \dots, n$) są wartościami funkcji interpolowanej, a funkcje bazowe Lagrange'a mają postać:

$$L_i^n = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

czyli:

$$L_i^n = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{j=n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (4)$$

Przykład: Zbudować wielomian interpolacyjny Lagrange’a stopnia $n = 2$.

- Węzły interpolacji: $\mathbf{X} = \{x_0, x_1, x_2\}$.
- Wartości funkcji: $\mathbf{F} = \{f_0, f_1, f_2\}$.
- Baza Lagrange’a: $L^2(x) = [L_0^2(x), L_1^2(x), L_2^2(x)]$.
- Wielomian interpolacyjny:

$$\varphi(x) = \mathbf{L}^2(x) \mathbf{f} = f_0 L_0^2(x) + f_1 L_1^2(x) + f_2 L_2^2(x).$$

$$L_i^2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{j=2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} : \quad L_0^2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

$$L_1^2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$L_2^2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Dla węzłów $\mathbf{X} = \{x_0, x_1, x_2\} = \{-1, 2, 3\}$ i wartości $\mathbf{F} = \{f_0, f_1, f_2\} = \{1, 4, 9\}$ wielomian interpolacyjny Lagrange’a przyjmuje postać $\varphi(x) = 1 \cdot x^2$.

5.3 Interpolacja Hermite’a

Istnieje możliwość zastosowania interpolacji, zaproponowanej przez Hermite’a, w której istotę stanowi budowanie funkcji interpolujących spełniających warunki:

$$\varphi^{(k)}(x_i) = f_i^{(k)}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, \quad m \leq n. \quad (5)$$

w których indeks (k) oznacza rząd pochodnych funkcji φ i f .

Najprostszym, ale najczęściej stosowanym wariantem interpolacji Hermite’a jest przypadek, kiedy funkcje $\varphi(x)$ są wielomianami algebraicznymi spełniającymi warunki (5). Liczba warunków $\varphi^{(k)}(x_i) = f_i^{(k)}$ wynosi $(n+1)(m+1)$ i dlatego w celu posłużenia się interpolacją globalną należy stosować wielomiany stopnia $(n+1)(m+1) - 1$.

Przykład:

Zbudować wielomian interpolacyjny Hermite’a dla $n = m = 1$ na zbiorze węzłów $\mathbf{X} = \{x_0, x_1\}$.

Rozwiązanie:

Stopień wielomianu wynosi $(n+1)(m+1) - 1 = 3$.

Skorzystamy z następujących wielomianów:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \\ \varphi'(x) &= a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2. \end{aligned}$$

Układ równań $\mathbf{U} \mathbf{a} = \mathbf{f}$ ma postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

Jeżeli przyjmiemy, że $x_0 = 0$, a $x_1 = L$, to:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{f} \longrightarrow \mathbf{U} \mathbf{a} = \mathbf{f} \longrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{f}$$

$$\varphi(x) = \Phi(x) \mathbf{a} = [1, x, x^2, x^3] \mathbf{a} = [1, x, x^2, x^3] \mathbf{U}^{-1} \mathbf{f} =$$

$$[H_1(x), H_2(x), H_3(x), H_4(x)] \mathbf{f} = \mathbf{H}(x) \mathbf{f},$$

gdzie lokalna baza Hermite'a:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad \xi \in [0, 1], \\ H_2(x) &= L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \\ H_3(x) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ H_4(x) &= L(-\xi^2 + \xi^3). \end{aligned}$$

Stosując interpolację Hermite'a do obliczenia $f(1.25)$ dla danych:

x	$f(x)$	$f'(x)$
$x_0 = 1.1$	0.4860	2.910
$x_1 = 1.3$	0.8616	4.918

otrzymujemy rozwiązanie:

$$a_0 = -169.09, \quad a_1 = 428.59, \quad a_2 = -361.46, \quad a_3 = 101.80$$

$$\varphi(x) = -169.09 + 428.59 \cdot x - 361.46 \cdot x^2 + 101.80 \cdot x^3$$

$$\varphi(x = 1.25) = \varphi(\xi = 0.75) = 0.6919.$$

W tym celu możemy posłużyć się wykorzystaniem transformacji i lokalnej bazy Hermite'a:
 $x \longrightarrow \xi, \quad L = x_1 - x_0 = 0.2$

$$\xi = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 1.1}{1.3 - 1.1} = \frac{x - 1.1}{0.2}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x = 1.25) &= \varphi(\xi = 0.75) = \\ &= H_1(\xi = 0.75) \cdot 0.4860 + H_2(\xi = 0.75) \cdot 2.910 + \\ &+ H_3(\xi = 0.75) \cdot 0.8616 + H_4(\xi = 0.75) \cdot 4.918 = 0.6919 \end{aligned}$$

5.4 Interpolacja 2D

Interpolacja 2D jest złożeniem interpolacji 1D wzdłuż dwóch osi x i y

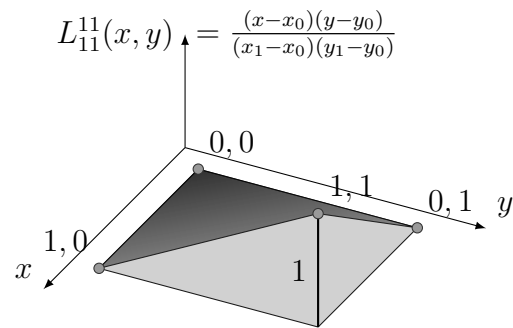
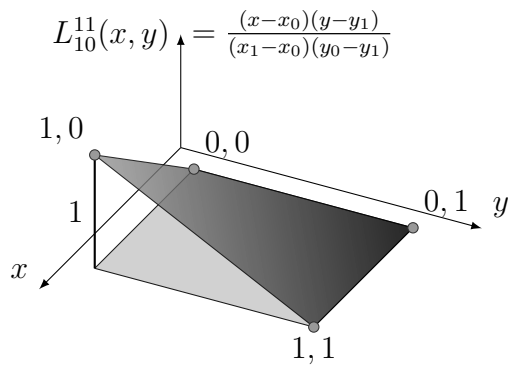
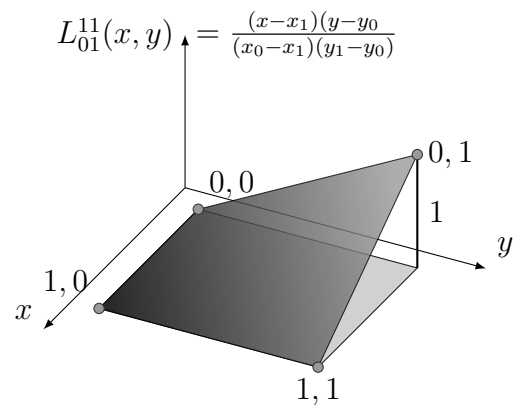
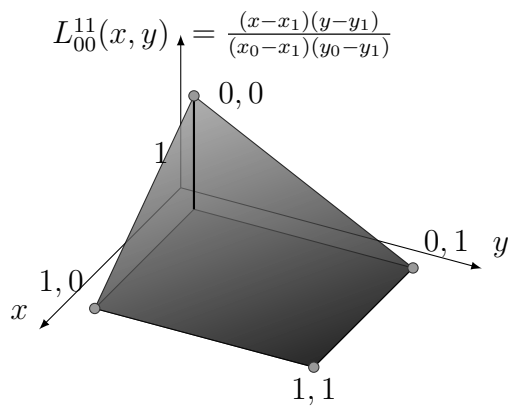
$$L^{nm}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f_{ij} L_{ij}^{nm}(x, y)$$

gdzie

$$L_{ij}^{nm}(x, y) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{k=n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \cdot \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{l=m} \frac{y - y_l}{y_j - y_l}$$

$$f_{ij} = f(x_i, y_j)$$

Interpolacja biliniowa



6 Aproksymacja

Aproksymacja różni się od interpolacji funkcji tym, że dla wyznaczania współczynników wielomianu aproksymacyjnego nie korzysta się z warunków $\varphi_i(x) = f_i$. Oznacza to, że wielomian aproksymacyjny na zbiorze X nie musi przyjmować wartości funkcji aproksymowanej.

Stopień wielomianu aproksymacyjnego nie ma więc związku z liczbą elementów zbioru $\mathbf{X}$, a wyznaczanie niewiadomych a_k jest realizowane np. przy pomocy aproksymacji optymalnej. Rozwiązanie problemu takiej aproksymacji wymaga:

- przyjęcia odpowiedniej bazy funkcyjnej,
- ustalenia kryterium oceny jakości aproksymacji, które służy do jednoznacznego określenia wartości a_k .

Najprostsza postać kryterium oceniającego jakość aproksymacji jest następująca:

$$\min R = \min \sum_{i=0}^n [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2 \quad (6)$$

Wartość funkcji R jest pewną miarą odchylenia funkcji aproksymującej $\varphi(x)$ od aproksymowanej $f(x)$. Ten sposób postępowania nosi nazwę metody najmniejszych kwadratów. Obliczenie wartości a_k polega na wykorzystaniu warunków stacjonarności funkcji R :

$$\frac{\partial R}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

6.1 Aproksymacja wielomianami algebraicznymi

Wielomian aproksymacyjny stopnia m ma postać:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m = \sum_{k=0}^m a_k x^k \quad (8)$$

Obliczając pochodne cząstkowe funkcji R otrzymujemy ostatecznie:

$$\mathbf{S} \mathbf{a} = \mathbf{t} \quad (9)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{m+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_m & s_{m+1} & s_{m+2} & \cdots & s_{2m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_m \end{bmatrix}.$$

gdzie:

$$s_k = \sum_{i=0}^n x_i^k, \quad t_k = \sum_{i=0}^n f_i x_i^k$$

Powyższy układ równań można też zapisać następująco:

$$[s_k, s_{k+1}, \dots, s_{k+m}] \mathbf{a} = t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

Przykład:

Zbudować wielomian aproksymacyjny stopnia $m = 1$ dla funkcji:

i	0	1	2	3
x	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$
f	-3	-10	20	3

Rozwiązanie:

Wielomian aproksymacyjny ma postać $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$.

Funkcja R : $R = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i - f_i)^2$.

Układ równań $\mathbf{S} \mathbf{a} = \mathbf{t}$ przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n f_i \\ \sum_{i=0}^n f_i x_i \end{bmatrix}.$$

Dla powyższych danych:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 40.841 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie tego układu równań daje: $a_0 = 2.5$, $a_1 = 5.7296$, zatem ostatecznie wielomian aproksymacyjny ma postać: $\varphi(x) = 2.5 + 5.7296 x$.

6.2 Aproksymacja wielomianami uogólnionymi

Poszukujemy wielomianu uogólnionego $\varphi(x)$, będącego najlepszym przybliżeniem średniokwadratowym funkcji $f(x)$ na zbiorze $\mathbf{X}$, tj. funkcji:

$$\varphi(x) = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + \dots + a_m \phi_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k \phi_k(x). \quad (11)$$

Współczynniki a_k są tak określone, aby wyrażenie:

$$R = \sum_{i=0}^n |f(x_i) - \varphi(x_i)|^2. \quad (12)$$

było minimalne.

Dla funkcji:

$$R = \sum_{i=0}^n \left[f(x_i) - \sum_{k=0}^m a_k \phi_k(x_i) \right]^2. \quad (13)$$

korzystamy z warunków:

$$\frac{\partial R}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (14)$$

W zapisie macierzowym układ równań przyjmuje postać:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{a} = \mathbf{D}^T \mathbf{f} \quad (15)$$

gdzie:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \dots & \phi_m(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_m(x_n) \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_n) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Przykład:

Znaleźć równanie krzywej najlepiej aproksymującej poniższą funkcję w sensie najmniejszych kwadratów:

i	0	1	2	3
x	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$
f	-3	-10	20	3

Przyjąć funkcje bazowe:

$$\phi_0(x) = \frac{3x}{\pi}, \quad \phi_1(x) = \cos(x).$$

Rozwiązanie:

Funkcja aproksymująca: $\varphi(x) = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x)$

$$\mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{a} = \mathbf{D}^T \mathbf{f}$$

gdzie:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) \\ \phi_0(x_3) & \phi_1(x_3) \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}.$$

Po wymnożeniu otrzymujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 13/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Po jego rozwiązaniu mamy: $a_0 = 6, a_1 = 10$.

Wielomian aproksymacyjny ma postać:

$$\varphi(x) = 6\phi_0(x) + 10\phi_1(x).$$