

Matematyka stosowana i metody numeryczne

Konspekt z wykładu

12 Rachunek wektorowy

W celu zdefiniowania wektora $\mathbf{a}$ należy podać:

- kierunek (prostą na której leży wektor)
- długość (moduł) $|\mathbf{a}|$
- zwrot (określony przez kolejność punktów A i B)
- *punkt przyłożenia*

W interpretacji geometrycznej wektor $\mathbf{a}$ to leżący na prostej i zawierający punkty A , B skierowany odcinek ($[A, B] = -[B, A]$). Kierunkiem wektora nazywa się kierunek tej prostej, zwrot określony jest przez kolejność punktów A i B .

Wektor jednostkowy o tym samym kierunku co dany wektor nazywa się wersorem $\mathbf{e}$.

12.1 Działania na wektorach

Wyróżniamy następujące działania na wektorach:

- mnożenie wektora $\mathbf{a}$ przez liczbę (skalar) α ,
- dodawanie i odejmowanie wektorów,
- iloczyn skalarny,
- iloczyn wektorowy.

Przez sumę geometryczną dwóch wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ rozumiemy wektor $\mathbf{c}$, którego początek leży w początku wektora $\mathbf{a}$ a koniec w końcu wektora $\mathbf{b}$. Odejmowanie określone jest jako dodawanie wektora przeciwnego $-\mathbf{b}$ do wektora $\mathbf{a}$.

12.2 Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny stanowi operator na przestrzeni liniowej (operacja oznaczona $\cdot$) przypisujący 2 argumentom z tej przestrzeni rzeczywistą wartość skalarną.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{cases} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi & \text{jeśli } \mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{jeśli } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ lub } \mathbf{b} = \mathbf{0}, \text{ lub } \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \end{cases}$$

gdzie: $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ – długości wektorów, $0 \leq \varphi \leq \pi$ – kąt pomiędzy nimi zawarty w płaszczyźnie wyznaczonej przez te wektory.

12.3 Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ stanowi operator na przestrzeni liniowej (przekształcenie oznaczone $\times$) przypisujący parze wektorów z tej przestrzeni wektor $\mathbf{c}$ spełniający następujące warunki:

- Wektor $\mathbf{c}$ jest prostopadły do wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.
- Długość wektora $\mathbf{c}$ wynosi:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi$$

gdzie: φ - kąt pomiędzy wektorami $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

- Wektor $\mathbf{c}$ tworzy z wektorami $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ układ prawoskrętny.

12.4 Zestawienie właściwości iloczynów skalarnego i wektorowego

Iloczyn skalarny	Iloczyn wektorowy
Iloczyn skalarny jest skalar.	Iloczyn wektorowy jest wektorem.
Iloczyn skalarny jest przemienny.	Iloczyn wektorowy nie jest przemienny.
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ Warunek prostopadłości	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ Warunek równoległości
W obu iloczynach zachodzi prawo rozdzielności względem dodawania.	
Postać iloczynów wyrażona przez składowe skalarne:	
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
Iloczyn skalarny istnieje tylko dla dwóch wektorów.	Iloczyn wektorowy istnieje dla dowolnej liczby czynników.
Iloczyn. skalarny jest niezmiennikiem względem transformacji ortogonalnej układu.	Iloczyn wektorowy nie jest niezmiennikiem względem transformacji ortogonalnej układu – jest on pseudowektorem.

12.5 Zmiana bazy w przestrzeni dwuwymiarowej

Wektorem $\mathbf{x}$ nazywamy wielkość, której współrzędne x_1, x_2 transformują się przy obrocie o kąt α według wzoru:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad x'_i = \sum_{j=1}^2 q_{ji} x_j, \quad i = 1, 2.$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{x}$$

Transformacja odwrotna jest obliczana według wzoru $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{x}'$. Elementami macierzy $\mathbf{Q}$ są cosinusy kierunkowe $q_{ij} = \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_j)$ jakie tworzą osie współrzędnych układu starego $\mathbf{x}$ z układem nowym $\mathbf{x}'$:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11'} & \cos \alpha_{12'} \\ \cos \alpha_{21'} & \cos \alpha_{22'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Analogiczne są wzory transformacyjne dla przypadku przestrzennego:

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 q_{ji} x_j \quad \text{oraz} \quad x_i = \sum_{j=1}^3 q_{ij} x'_j, \quad i = 1, 2, 3$$

13 Rachunek tensorowy

Tensory są uogólnieniem pojęcia skalaru i wektora. Używa się ich np. do opisu odkształceń i naprężeń. W pewnym uproszczeniu tensor $\mathbf{T}$ możemy sobie wyobrażać jako liniowy operator działający na wektor $\mathbf{a}$ i produkujący z niego nowy wektor $\mathbf{v}$ o innym zwrocie, kierunku i wartości:

$$\mathbf{v} = \mathbf{T} \mathbf{a}.$$

Ilość wszystkich składowych tensora obliczamy wg relacji 3^n gdzie n jest rzędem tensora:

- wielkość skalarna to tensor rzędu zerowego, np. masa,
- wektor jest tensorem rzędu pierwszego, np. siła,
- tensor II rzędu ma postać macierzy 3×3 , np. tensor naprężenia.

Tensorem II rzędu $\mathbf{T}$ nazywamy taką wielkość określoną w punkcie P , która dowolnemu kierunkowi $\boldsymbol{\mu}$ przyporządkowuje wektor $\mathbf{t}_\mu$ czyli jest to operator liniowy odwzorujący wektor w wektor według relacji:

$$\mathbf{t}_\mu = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\mu}.$$

Dziewięć składowych tensora $\mathbf{T}$ można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix},$$

która jest reprezentacją tensora $\mathbf{T}$.

13.1 Transformacje tensorów

Transformację współrzędnych tensora $\mathbf{T}$ II rzędu można zapisać następująco:

$$t'_{ij} = \sum_{kl} q_{ki'} q_{lj'} t_{kl} = q_{ki'} q_{lj'} t_{kl}, \quad k, l = 1, 2, 3; \quad i', j' = 1, 2, 3;$$

Szczegółowo np. składowa t'_{13} jest transformowana według wzoru:

$$\begin{aligned} t'_{13} = q_{k1'} q_{l3'} t_{kl} = & q_{11'} q_{13'} t_{11} + q_{11'} q_{23'} t_{12} + q_{11'} q_{33'} t_{13} + \\ & q_{21'} q_{13'} t_{21} + q_{21'} q_{23'} t_{22} + q_{21'} q_{33'} t_{23} + \\ & q_{31'} q_{13'} t_{31} + q_{31'} q_{23'} t_{32} + q_{31'} q_{33'} t_{33}. \end{aligned}$$

Tensor $\mathbf{T}$ podlega transformacji zgodnie z zapisem macierzowym:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q},$$

a transformacja odwrotna jest zapisywana jako iloczyn: $\mathbf{T} = \mathbf{Q} \mathbf{T}' \mathbf{Q}^T$.

13.2 Działania na tensorach

- Dodawanie tensorów:

$$t_{ij} + p_{ij} = s_{ij}.$$

Podczas tej operacji dodaje się odpowiednie składowe, podobnie jak przy dodawaniu macierzy.

- Mnożenie tensora przez skalar: $a t_{ij} = t_{ij} a$ i $a(t_{ij} + s_{ij}) = a t_{ij} + a s_{ij}$.
- Iloczyn zewnętrzny dwóch tensorów:

$$a_i b_j = c_{ij}, \quad a_{ij} b_{km} = c_{ijk m}.$$

Rząd powstałego tensora jest równy sumie rzędów mnożnej i mnożnika.

- Iloczyn wewnętrzny (zwężenie, kontrakcja) dwóch tensorów.
Mnożąc dwa tensory ich wskaźniki się powtarzają, otrzymamy tzw. iloczyn wewnętrzny (kontrakcję):

$$t_{ijk} p_{km} = s_{ijm}$$

gdzie rząd powstałego tensora jest mniejszy od sumy rzędów mnożnej i mnożnika o wielokrotność 2 powtarzających się indeksów. W powyższym przykładzie $3 + 2 - 2 \cdot 1 = 3$.

13.3 Symetria i antysymetria, aksjator i dewiator

- Tensor jest symetryczny gdy $t_{ij} = t_{ji}$.
- Tensor jest antysymetryczny gdy $t_{ij} = -t_{ji}$.
- Iloczyn tensorów symetrycznego i antysymetrycznego jest zawsze równy 0.

Śladem (*ang. trace*) tensora $\mathbf{T}$ nazywamy: $\text{tr}(\mathbf{T}) = t_{ij} \cdot \delta_{ij} = t_{ii} = t_{11} + t_{22} + t_{33}$.

Każdy tensor rzędu drugiego można rozłożyć na sumę dwóch tensorów – aksjatora i dewiatora:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{11} - t & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} - t & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} - t \end{bmatrix},$$

gdzie: $t = \frac{1}{3} \cdot (t_{11} + t_{22} + t_{33}) = \frac{1}{3} \cdot \text{tr}(\mathbf{T})$.

W mechanice aksjator jest związany ze zmianą objętości, a dewiator – ze zmianą postaci deformacji.

13.4 Niezmienniki tensora II rzędu

Każdemu tensorowi drugiego rzędu $\mathbf{T}$ można przyporządkować trzy niezmienniki czyli wielkości niezależne od układu współrzędnych:

- $I_1 = \text{tr}(\mathbf{T}) = t_{ii}$
- $I_2 = -\frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{T}^2) - (\text{tr}(\mathbf{T}))^2] = \begin{vmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{13} \\ t_{31} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix}$
- $I_3 = \det(\mathbf{T}) = |t_{ij}|$

Niezmienniki związane są relacją (tw. Cayleya-Hamiltona):

$$\mathbf{T}^3 - I_1 \mathbf{T}^2 + I_2 \mathbf{T} - I_3 \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

13.5 Przykłady

Przykład 1

W danym punkcie określony jest stan naprężenia przez tensor zobrazowany macierzą σ :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć:

- niezmienniki tensorów,
- wartości (naprężenia) główne tensora,
- aksjator i dewiator.

Rozwiązanie:

Obliczamy niezmienniki dla σ :

- $I_1 = \text{tr}(\sigma) = 2$
- $I_2 = -\frac{1}{2} \left[\text{tr}(\sigma^2) - (\text{tr}(\sigma))^2 \right] = -13$
- $I_3 = \det(\sigma) = -6$

Po rozwiązaniu równania charakterystycznego:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0.$$

otrzymujemy naprężenia główne:

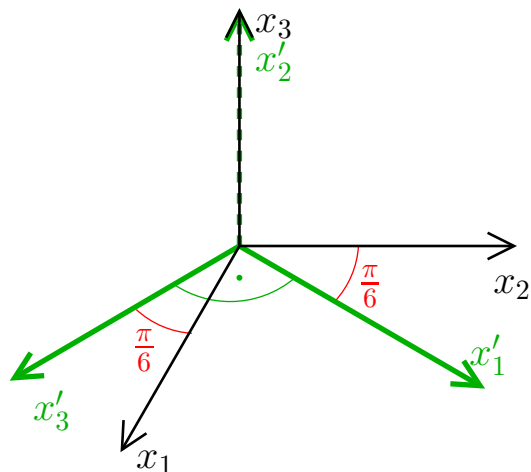
$$\sigma_\lambda = \begin{bmatrix} 4.5616 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4384 & 0 \\ 0 & 0 & -3.0000 \end{bmatrix}.$$

Aksjator i dewiator:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -2 & 0 \\ -2 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix}.$$

Przykład 2

Znaleźć współrzędne tensora $\mathbf{T}$ w nowym układzie współrzędnych.



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11'} & \cos \alpha_{12'} & \cos \alpha_{13'} \\ \cos \alpha_{21'} & \cos \alpha_{22'} & \cos \alpha_{23'} \\ \cos \alpha_{31'} & \cos \alpha_{32'} & \cos \alpha_{33'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) & \cos \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{6} \\ \cos \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{2} & \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) \\ \cos \frac{\pi}{2} & \cos 0 & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2.75000 & 0.36603 & -0.43301 \\ 1.00000 & -3.00000 & 1.73205 \\ -0.43301 & -1.36603 & 2.25000 \end{bmatrix}$$