

Matematyka stosowana i metody numeryczne

Konspekt z wykładów

3 Układy liniowych równań algebraicznych

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

Decyzja wyboru odpowiedniej metody zależy od:

- postaci macierzy $\mathbf{A}$,
- specyfiki zagadnienia, które jest reprezentowane przez układ równań.

3.1 Podstawianie w przód

Dla macierzy dolnotrójkątnych:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}{l_{ii}} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

3.2 Podstawianie wstecz

Dla macierzy górnotrójkątnych:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j}{u_{ii}} \quad \text{dla } i = n, n-1, \dots, 1$$

Przykład: Rozwiązać układ liniowych równań $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$, gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

równanie: $i = 3$ $x_i = b_i/a_{ii} \rightarrow x_3 = b_3/a_{33} = 1$

równanie: $i = 2$ $s = \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \rightarrow s = \sum_{j=2+1}^3 a_{2j} x_j = a_{23} x_3 = 8$

$$x_i = (b_i - s)/a_{ii} \rightarrow x_2 = (b_2 - 8)/a_{22} = 2$$

równanie: $i = 1$ $s = \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \rightarrow s = \sum_{j=1+1}^3 a_{1j} x_j = a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = 2$

$$x_i = (b_i - s)/a_{ii} \rightarrow x_1 = (b_1 - 2)/a_{11} = 1$$

Rozwiązanie: $\mathbf{X} = [1, 2, 1]^T$

3.3 Metoda Gaussa

I. Eliminacja w przód:

W $n - 1$ krokach o numerach $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}$$

gdzie:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

dla: $i = k + 1, k + 2, \dots, n \quad j = k + 1, k + 2, \dots, n$.

II. Podstawianie wstecz.

Przykład: Rozwiązać układ liniowych równań $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$, gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 10 \\ -2 & 8 & -2 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Etap I • krok $k = 1$;

wiersz $i = 1$ $[2, -4, 10] [4]$

wiersz $i = 2$, $m_{21} = a_{21}/a_{11} = -1$

$$\begin{array}{rcl} & [-2 & 8 & -2] & [12] \\ - & [-2 & 4 & -10] & [-4] \\ = & [\mathbf{0} & 4 & 8] & [\mathbf{16}] \end{array}$$

wiersz $i = 3$, $m_{31} = a_{31}/a_{11} = 0.5$

$$\begin{array}{rcl} & [1 & 1 & 9] & [12] \\ - & [1 & -2 & 5] & [2] \\ = & [\mathbf{0} & 3 & 4] & [\mathbf{10}] \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ 10 \end{bmatrix}$$

• krok $k = 2$

wiersz $i = 2$ $[0, 4, 8] [16]$

wiersz $i = 3$, $m_{32} = a_{32}/a_{22} = 0.75$

$$\begin{array}{rcl} & [0 & 3 & 4] & [10] \\ - & [0 & 3 & 6] & [12] \\ = & [\mathbf{0} & \mathbf{0} & -2] & [-\mathbf{2}] \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Etap II Podstawianie wstecz – poprzedni przykład dla układu z macierzą górnątrójkątną.

3.4 Metoda Gaussa-Jordana

Układ równań o postaci:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}^{(1)}x_1 & + & a_{12}^{(1)}x_2 & + & a_{13}^{(1)}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 & + & a_{22}^{(1)}x_2 & + & a_{23}^{(1)}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1}^{(1)}x_1 & + & a_{n2}^{(1)}x_2 & + & a_{n3}^{(1)}x_3 & + & \dots & + & a_{nn}^{(1)}x_n & = & b_n^{(1)} \end{array}$$

przekształcamy jak napisano poniżej.

Pierwsze równanie dzielimy przez $a_{11}^{(1)}$, a następnie od i -tego wiersza, $i = 2, 3, \dots, n$, odejmujemy wiersz pierwszy pomnożony przez $a_{i1}^{(1)}$, otrzymując:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & a_{12}^{(2)}x_2 & + & a_{13}^{(2)}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}^{(2)}x_n & = & b_1^{(2)} \\ & & a_{22}^{(2)}x_2 & + & a_{23}^{(2)}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & a_{n2}^{(2)}x_2 & + & a_{n3}^{(2)}x_3 & + & \dots & + & a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)} \end{array}$$

Następnie drugie równanie dzielimy obustronnie przez $a_{22}^{(2)}$ i od i -tego wiersza, $i = 1, 3, \dots, n$, odejmujemy wiersz drugi pomnożony przez $a_{i2}^{(2)}$. Po $n - 1$ eliminacjach otrzymujemy układ postaci:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & b_1^{(n)} \\ & & x_2 = b_2^{(n)} \\ & & \dots \\ & & x_n = b_n^{(n)} \end{array}$$

czyli gotowe rozwiązanie.

Przykład: Rozwiązać układ liniowych równań $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$, gdzie $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są dane jak w poprzednim przykładzie.

Krok 1:

$$\begin{array}{llll} 1. & \text{wiersz 1} & [2, -4, 10] [4]/a_{11} & \rightarrow [1, -2, 5] [2] \\ & \text{a) od wiersza 2} & & [-2, 8, -2] [12] \\ & \text{odejmujemy wiersz 1} & [1, -2, 5] [2] \cdot a_{21} & = [-2, 4, -10] [-4] \\ & & & \rightarrow [0, 4, 8] [16] \\ & \text{b) od wiersza 3} & & [1, 1, 9] [12] \\ & \text{odejmujemy wiersz 1} & [1, -2, 5] [2] \cdot a_{31} & = [1, -2, 5] [2] \\ & & & \rightarrow [0, 3, 4] [10] \end{array}$$

Po 1. eliminacji:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Krok 2:

$$\begin{array}{llll}
 2. & \text{wiersz } 2 & [0, 4, 8] [16]/a_{22} & \rightarrow [0, 1, 2] [4] \\
 & \text{a) od wiersza 1} & & [1, -2, 5] [2] \\
 & \text{odejmujemy wiersz } 2 & [0, 1, 2] [4] \cdot a_{12} & = [0, -2, -4] [-8] \\
 & & & \rightarrow [1, 0, 9] [10] \\
 & \text{b) od wiersza 3} & & [0, 3, 4] [10] \\
 & \text{odejmujemy wiersz } 2 & [0, 1, 2] [4] \cdot a_{32} & = [0, 3, 6] [12] \\
 & & & \rightarrow [0, 0, -2] [-2]
 \end{array}$$

Po 2. eliminacji:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Krok 3:

$$\begin{array}{llll}
 3. & \text{wiersz } 3 & [0, 0, -2] [-2]/a_{33} & \rightarrow [0, 0, 1] [1] \\
 & \text{a) od wiersza 1} & & [1, 0, 9] [10] \\
 & \text{odejmujemy wiersz } 3 & [0, 0, 1] [1] \cdot a_{13} & = [0, 0, 9] [9] \\
 & & & \rightarrow [1, 0, 0] [1] \\
 & \text{b) od wiersza 2} & & [0, 1, 2] [4] \\
 & \text{odejmujemy wiersz } 3 & [0, 0, 1] [1] \cdot a_{23} & = [0, 0, 2] [2] \\
 & & & \rightarrow [0, 1, 0] [2]
 \end{array}$$

Po 3. eliminacji:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Po wykonaniu eliminacji wektor $\mathbf{B}$ stanowi rozwiązanie.

3.5 Metoda Choleskiego-Banachiewicza

I. Rozkład $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$:

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}^2} \quad l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} l_{kp}}{l_{kk}}$$

gdzie: $k = 1, 2, \dots, n$; $i = k + 1, k + 2, \dots, n$.

II. Rozwiązanie układu z macierzą dolnotrójkątną $\mathbf{L} \mathbf{Y} = \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{Y}$ (podstawianie w przód).

III. Rozwiązanie układu z macierzą górnortrójkątną $\mathbf{U} \mathbf{X} = \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ (podstawianie wstecz).

Przykład: Rozwiązać układ liniowych równań $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$, gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 8 & 17 & -1 \\ -4 & -1 & 57 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -12 \\ -17 \\ 65 \end{bmatrix}.$$

I. Wykonujemy rozkład $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 8 & 17 & -1 \\ -4 & -1 & 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11}^2 && \rightarrow l_{11} = 2 \\ a_{21} &= l_{21} l_{11} && \rightarrow l_{21} = 8/2 = 4 \\ a_{31} &= l_{31} l_{11} && \rightarrow l_{31} = -4/2 = -2 \\ a_{22} &= l_{21}^2 + l_{22}^2 && \rightarrow l_{22} = \sqrt{17 - 16} = 1 \\ a_{32} &= l_{31} l_{21} + l_{32} l_{22} && \rightarrow l_{32} = (-1 + 8)/1 = 7 \\ a_{33} &= l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 && \rightarrow l_{33} = \sqrt{57 - 4 - 49} = 2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

II. Podstawianie w przód: $\mathbf{L} \mathbf{Y} = \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{Y}$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

III. Podstawianie wstecz: $\mathbf{U} \mathbf{X} = \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.6 Metoda Jacobiego

Tworzymy ciąg przybliżeń $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ według wzoru:

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Przykład: Rozwiązać układ liniowych równań $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$, gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

- Sprawdzamy warunki zbieżności.
- Przyjmujemy początkowe przybliżenie $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.
- Przyjmujemy kryterium przerywania procesu iteracyjnego, np. sprawdzamy wielkość residuum ε .

1. iteracja $k = 1$:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -(a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} - b_1)/a_{11} = 1.3 \\x_2^{(1)} &= -(a_{21}x_1^{(0)} + a_{23}x_3^{(0)} - b_2)/a_{22} = 1.4 \text{ oraz } \varepsilon = 0.36 \\x_3^{(1)} &= -(a_{31}x_1^{(0)} + a_{32}x_2^{(0)} - b_3)/a_{33} = 1.4\end{aligned}$$

2. iteracja $k = 2$:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= -(a_{12}x_2^{(1)} + a_{13}x_3^{(1)} - b_1)/a_{11} = 0.88 \\x_2^{(2)} &= -(a_{21}x_1^{(1)} + a_{23}x_3^{(1)} - b_2)/a_{22} = 0.87 \text{ oraz } \varepsilon = 0.13 \\x_3^{(2)} &= -(a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)} - b_3)/a_{33} = 0.84\end{aligned}$$

...

16. iteracja $k = 16$:

$$\mathbf{x}^{(16)} = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \end{bmatrix} \text{ oraz } \varepsilon = 1.10\text{e} - 7$$

3.7 Metoda Gaussa-Seidla

Tworzymy ciąg przybliżeń $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ według wzoru:

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Przykład: Rozwiązać układ liniowych równań $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$, gdzie $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są określone w poprzednim przykładzie.

Warunki zbieżności, początkowe przybliżenie i kryterium przerywania procesu iteracyjnego przyjmujemy jak w poprzednim przykładzie.

1. iteracja $k = 1$:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -(a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} - b_1)/a_{11} = 1.3 \\x_2^{(1)} &= -(a_{21}x_1^{(1)} + a_{23}x_3^{(0)} - b_2)/a_{22} = 1.01 \text{ oraz } \varepsilon = 0.155 \\x_3^{(1)} &= -(a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)} - b_3)/a_{33} = 0.996\end{aligned}$$

2. iteracja $k = 2$:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= -(a_{12}x_2^{(1)} + a_{13}x_3^{(1)} - b_1)/a_{11} = 0.99980 \\x_2^{(2)} &= -(a_{21}x_1^{(2)} + a_{23}x_3^{(1)} - b_2)/a_{22} = 1.00046 \text{ oraz } \varepsilon = 2.096\text{e} - 4 \\x_3^{(2)} &= -(a_{31}x_1^{(2)} + a_{32}x_2^{(2)} - b_3)/a_{33} = 0.99982\end{aligned}$$

...

4. iteracja $k = 4$:

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 1.00000 \\ 1.00000 \end{bmatrix} \text{ oraz } \varepsilon = 2.04\text{e} - 8$$

4 Układy równań nad- i podokreślonych

4.1 Podokreślone układy równań

Układy równań o macierzach $\mathbf{A}_{m \times n}$, gdzie $m < n$, nazywamy podokreślonymi. Taki układ równań można rozwiązać za przy pomocy metody Gaussa-Jordana.

Przykład: Rozwiązać układ równań:

$$\begin{array}{rrcr} 4x_1 & + & 16x_2 & - & 14x_3 & = & -8 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & - & 8x_3 & = & -5 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 16 & -14 & -8 \\ 2 & 9 & -8 & -5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3.5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$$x_1 = 2.0 - 0.5x_3 \quad x_2 = -1.0 + x_3$$

Otrzymane rozwiązanie określa rozmaitość jednowymiarową czyli prostą nie przechodzącą przez początek układu współrzędnych.

4.2 Nadokreślone układy równań

Współczynniki nadokreślonego układu równań $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ tworzą macierz $\mathbf{A}_{m \times n}$, gdzie $m > n$. W tym przypadku możliwe są dwie sytuacje:

- układ nie ma rozwiązania – jest sprzeczny,
- układ ma rozwiązanie – nie jest sprzeczny.

Zastosowanie metody Gaussa-Jordana rozstrzyga czy układ ma rozwiązanie czy jest sprzeczny. Jeśli układ jest sprzeczny to możemy poszukiwać pseudorozwiązania w sensie metody najmniejszych kwadratów:

$$\mathbf{S} \mathbf{x} = \mathbf{t}$$

gdzie:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

Przykład: Rozwiązać nadokreślony układ równań:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \end{array}$$

Stosujemy algorytm Gaussa-Jordana

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1.25 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1.25 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow x_1^* = 0.5, \quad x_2^* = 1.25, \quad 0 = 2(!!)$$

Układ równań **jest sprzeczny** ($0 \neq 2$). Szukamy pseudorozwiązania w sensie metody najmniejszych kwadratów.

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} \mathbf{x} = \mathbf{t} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 32 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1^* = 1.0 \\ x_2^* = 1.5 \end{cases}$$