

Matematyka stosowana i metody numeryczne

Konspekt z wykładu

1 Rozwiązywanie równań nieliniowych

Rozwiązaniem lub pierwiastkiem równania $f(x) = 0$ lub $g(x) = h(x)$ nazywamy każdą liczbę $x = x^*$, która spełnia to równanie. Równania nieliniowe rozwiązywać będziemy metodami iteracyjnymi, które wymagają:

1. dokonania właściwego wyboru punktu startowego,
2. wybrania odpowiedniego algorytmu iteracyjnego zapewniającego zbieżność procesu obliczeniowego,
3. określenia kryterium stopu wynikającego z wymaganej dokładności obliczeń:

- tempo zbieżności:

$$\epsilon_1 = \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|,$$

- residuum:

$$\epsilon_2 = \left| \frac{f(x_n)}{f(x_0)} \right|,$$

- liczba iteracji:

$$n = ?$$

Obliczenia zostaną zakończone po spełnieniu warunków:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \leq \epsilon_1^{\text{dop}}, \quad \epsilon_2 \leq \epsilon_2^{\text{dop}} &\rightarrow \text{spełnione równocześnie} \\ n \leq n^{\text{max}} &\rightarrow \text{alternatywa} \end{aligned}$$

gdzie: $\epsilon_1^{\text{dop}}, \epsilon_2^{\text{dop}}, n^{\text{max}}$ – zadane wielkości dopuszczalne.

1.1 Metoda połowienia (bisekcji)

Dla wyjściowego równania $f(x)$ poszukuje się przybliżenia rozwiązania wewnątrz przedziału $x \in (a, b)$. Przy każdej iteracji oblicza się jego środek:

$$x = \frac{a + b}{2}, \tag{1}$$

a następnie sprawdza się, w którym podprzedziale (a, x) lub (x, b) znajduje się poszukiwany pierwiastek x^* i ten przedział podlega dalszemu podziałowi.

Przykład: Znaleźć pierwiastek równania

$$f(x) = (x - 1)(x + 1) = 0$$

przyjmując $a = 0$, $b = 1.5$ i $\epsilon_x = \epsilon_f = 1 \cdot 10^{-4}$.

Rozwiązanie:

$$f_a = -1 \quad f_b = 1.2500$$

$iter = 1$

$$x = 0.75 \quad f_x = -0.4375 \quad a = 0.75 \quad f_a = -0.4375 \quad \epsilon_x = 0.75000 \quad \epsilon_f = 0.43750$$

$iter = 2$

$$x = 1.125 \quad f_x = 0.26562 \quad b = 1.125 \quad f_b = 0.26562 \quad \epsilon_x = 0.375 \quad \epsilon_f = 0.26562$$

$iter = 3$

$$x = 0.9375 \quad f_x = -0.12109 \quad a = 0.9375 \quad f_a = -0.12109 \quad \epsilon_x = 0.18750 \quad \epsilon_f = 0.12109$$

...

$iter = 14$

$$x = 1.0 \quad f_x = 6.1036e-5 \quad b = 1.0 \quad f_b = 6.1036e-5 \quad \epsilon_x = 9.1553e-05 \quad \epsilon_f = 6.1036e-5$$

1.2 Metoda interpolacji liniowej (regula falsi)

W interpretacji geometrycznej metoda interpolacji liniowej oznacza zastąpienie krzywej $f(x)$ cięciwą łączącą punkty $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$:

$$x_k = \frac{a f_b - b f_a}{f_b - f_a} \quad (2)$$

Przykład: Znaleźć pierwiastek równania

$$f(x) = (x - 1)(x + 1) = 0$$

przyjmując $a = 0$, $b = 1.5$, i $\epsilon_x = \epsilon_f = 1 \cdot 10^{-4}$.

Rozwiązanie:

$$f_a = -1 \quad f_b = 1.2500 \quad x_0 = 0$$

$iter = 1$

$$x = 0.66667 \quad f_x = -0.55556 \quad \epsilon_x = 0.66667 \quad \epsilon_f = 0.55556$$

$$a = 0.66667 \quad f_a = -0.55556 \quad x_0 = 0.66667$$

$iter = 2$

$$x = 0.92308 \quad f_x = -0.14793 \quad \epsilon_x = 0.25641 \quad \epsilon_f = 0.14793$$

$$a = 0.92308 \quad f_a = -0.14793 \quad x_0 = 0.92308$$

$iter = 3$

$$x = 0.98413 \quad f_x = -0.031494 \quad \epsilon_x = 0.06105 \quad \epsilon_f = 0.031494$$

$$a = 0.98413 \quad f_a = -0.031494 \quad x_0 = 0.98413$$

...

$iter = 8$

$$x = 0.99999 \quad f_x = -1.0240e-5$$

$$\epsilon_x = 2.0480e-05 \quad \epsilon_f = 1.0240e-5$$

1.3 Metoda siecznych

W tej metodzie generowanie ciągu kolejnych przybliżeń wartości poszukiwanego pierwiastka odbywa się na podstawie znanych wartości dwóch ostatnio obliczonych rzędnych funkcji $f(x)$. Wartość kolejnego przybliżenia poszukiwanego pierwiastka $x_{(k+1)}$ wyznacza się jako odciętą punktu przecięcia siecznej przechodzącej przez punkt $A(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ oraz $B(x_k, f(x_k))$ z osią x -ów:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

1.4 Metoda stycznych (Newtona-Raphsona)

Podstawę metody stanowi interpolacja funkcji $f(x)$ za pomocą stycznej prowadzonej w punkcie $B(x_0, f_0)$. Kolejne przybliżenia poszukiwanego pierwiastka są odciętymi punktu przecięcia stycznej z osią x :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (4)$$

Przykład: Znaleźć pierwiastek równania

$$f(x) = (x - 1)(x + 1) = 0$$

przyjmując $x_0 = 1.5$, i $\epsilon_x = \epsilon_f = 1 \cdot 10^{-4}$

Rozwiązanie:

$$k = 0$$

$$x_1 = 1.0833, \quad \epsilon_x = 0.41667, \quad \epsilon_f = 0.17361$$

$$k = 1$$

$$x_2 = 1.0032, \quad \epsilon_x = 0.080128, \quad \epsilon_f = 0.0064205$$

$$k = 2$$

$$x_1 = 1.0000, \quad \epsilon_x = 0.0032000, \quad \epsilon_f = 1.0240e-5$$

$$k = 3$$

$$x_1 = 1.0000, \quad \epsilon_x = 5.1200e-06, \quad \epsilon_f = 2.6215e-11$$

1.5 Zmodyfikowana metoda Newtona

Jeżeli pochodna $f'(x)$ zmienia się w przedziale domkniętym $< a, b >$ nieznacznie to we wzorze:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

można przyjąć:

$$f'(x_k) \approx f'(x_0).$$

Kolejne przybliżenia pierwiastka x^* równania $f(x) = 0$ można obliczyć ze wzoru:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

1.6 Metoda iteracji prostej

W metodzie tej równanie $f(x) = 0$ przekształcamy do równoważnego:

$$x = g(x)$$

Algorytm metody polega na wykorzystaniu schematu rekurencyjnego:

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

do generowania ciągu kolejnych przybliżeń poszukiwanego rozwiązania x^* .

Wygenerowany ciąg liczbowy: $x_0, x_1, x_2, \dots$ może okazać się zbieżny do rozwiązania x^* , ale też może nie być zbieżny i wykazywać niestabilność.

1.7 Metoda iteracji prostej z relaksacją

Relaksacja zamienia początkowy schemat rozbieżny na szybko zbieżny.

Do równania $x = g(x)$ dodajemy stronami αx stąd

$$x + \alpha x = g(x) + \alpha x \implies x = \frac{g(x)}{1 + \alpha} + x \frac{\alpha}{1 + \alpha} \implies x = h(x)$$

Wartość współczynnika α dobieramy tak by $h'(x^*) = 0$ stąd:

$$\alpha = -g'(x^*).$$

gdzie to x^* wartość najbliższa poszukiwanemu rozwiązaniu.

Końcowa postać schematu iteracyjnego:

$$x_{k+1} = h(x_k) \implies x_{k+1} = \frac{g(x_k)}{1 - g'(x^*)} - x_k \frac{g'(x^*)}{1 - g'(x^*)}$$

Gdy x^* jest nieznane to można przyjąć $x^* \leftarrow x_k$ lub $x^* \leftarrow x_0$.

Przykład: Znaleźć pierwiastek równania $x^2 - 2 = 0$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} x^2 = 2 &\implies x = \frac{2}{x} \implies x + \alpha x = \frac{2}{x} + \alpha x \\ g(x) = \frac{2}{x} &\implies g'(x) = -\frac{2}{x^2} = -\frac{2}{2} = -1 \implies g'(x^*) = -1 \\ h(x) &= \frac{1}{1 - (-1)} \frac{2}{x} - \frac{-1}{1 - (-1)} x = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x} + x \right) \end{aligned}$$

Teraz formuła rekurencyjna przyjmie postać

$$x_{k+1} = h(x_k) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x_k} + x_k \right) \quad (7)$$

Jeżeli teraz przyjmiemy $x_0 = 0.5$ to otrzymamy:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2.25000 \\x_2 &= 1.56944 \\x_3 &= 1.42189 \\x_4 &= 1.41423 \\x_5 &= 1.41421 = x^* \approx \sqrt{2}\end{aligned}$$

2 Układy równań nieliniowych

Uogólnienie metody Newtona-Raphsona (metoda stycznej w punkcie) na przypadek wielowymiarowy można zapisać wektorowo w następujący sposób:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - (\mathbf{J}(\mathbf{x}_k))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (8)$$

wektor zmiennych	wektor funkcji	macierz Jakobianu
$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$	$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$	$\mathbf{J} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

lub $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$,

gdzie $\Delta \mathbf{x}_{k+1} = -(\mathbf{J}(\mathbf{x}_k))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$.

Przykład: Rozwiąż poniższy układ równań metodą Newtona-Raphsona przyjmując wektor startowy $\mathbf{x}_0 = [1, 0]$:

$$\begin{aligned}-x_1 + (x_2 - 1)^2 - 2 &= 0, \\(x_1 + 2)^3 - x_2 + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Rozwiązanie

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2(x_2 - 1) \\ 3(x_1 + 2)^2 & -1 \end{bmatrix}$$

$k = 0$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 28 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 27 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1.05455 \\ -0.47273 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -0.054545 \\ -0.472727 \end{bmatrix},$$

$k = 1$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} 0.22347 \\ 8.83587 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} -1.0000 & -2.9455 \\ 11.3544 & -1.0000 \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -0.7491 \\ 0.3302 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -0.80366 \\ -0.14253 \end{bmatrix},$$

$\vdots$

$k = 8$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_8) = \begin{bmatrix} 0.0000e + 00 \\ -5.3395e - 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}_8) = \begin{bmatrix} -1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -1.0000 \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} -5.7021e - 23 \\ -5.3395e - 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} -2.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}.$$