

8. Metody bezsiatkowe i inne metody komputerowe na tle MES

Sławomir Milewski
e-mail: slawek@L5.pk.edu.pl

Tematyka

- ◆ Wprowadzenie
- ◆ Kryteria klasyfikacji metod komputerowych
- ◆ Sformułowania problemów brzegowych
- ◆ Dyskretyzacja i aproksymacja rozwiązania
- ◆ Przegląd metod komputerowych wg kryteriów
- ◆ Metoda różnic skończonych **MRS** na tle **MES**
- ◆ **Przykład obliczeniowy –**
program nr 1 (MRS / MES 1D) w Matlabie
- ◆ Metody bezsiatkowe
- ◆ Bezsiatkowa metoda różnic skończonych **BMRS** na tle **MES**
- ◆ **Przykład obliczeniowy –**
program nr 2 (BMRS 2D) w Matlabie
- ◆ Podsumowanie

Wprowadzenie

Metoda Elementów Skończonych MES

- ◆ Ogólna, najbardziej rozpowszechniona, najbardziej rozwinięta
- ◆ Podstawa większości programów komercyjnych
(Abaqus, Adina, Ansys, Diana, FELT, Feap, Mark, Robot, ...)
- ◆ Stosowana przy większości zadań inżynierskich mechaniki i fizyki
- ◆ Rozwinięte klasy i typy elementów skończonych, podstawy matematyczne, opracowanie wyników, metody szacowania błędów

Wprowadzenie

Dlaczego mówimy o **innych metodach komputerowych**?

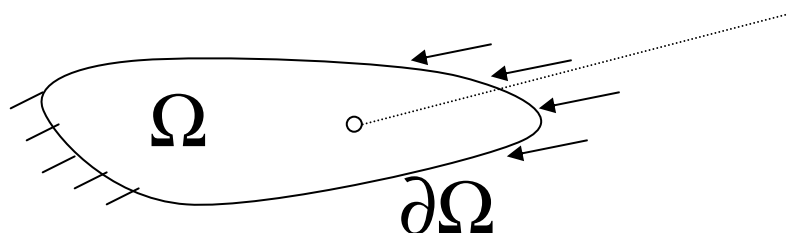
- ◆ Względy **historyczne** (MES nie jest najstarsza...)
- ◆ Względy **dydaktyczne** (łatwiej rozwiązać zadanie „ręcznie” za pomocą np. metody różnic skończonych)
- ◆ Względy **praktyczne**
 - Niektóre **zastosowania** (analiza płyt, ruchomy brzeg, szczelina, ...)
 - Dostępne **oprogramowanie** (własne lub komercyjne)
 - **Kombinacje** metod (np. MES + BMRS)
 - Potrzeba **weryfikacji** obliczeń MES inną metodą
- ◆ **Efektywność** i **szybkość** algorytmu
 - Potrzeba częstej przebudowy siatki (adaptacja)
 - Dokładność rozwiązania i jego pochodnych (nadzbieżność)
 - Końcowe opracowanie wyników (podejście hybrydowe)
- ◆ Aktualne **trendy w nauce** (metody bezsiatkowe)

Kryteria klasyfikacji metod

- ◆ **Sformułowanie** problemu brzegowego
- ◆ Podstawa **dyskretyzacji zadania** (obszar, brzeg, podobszar, ...)
- ◆ Sposób **dyskretyzacji obszaru i brzegu** (węzły, elementy + węzły)
- ◆ Sposób **dyskretyzacji rozwiązania** (wartości węzłowe, inne s.s.)
- ◆ Sposób **aproksymacji rozwiązania**
- ◆ Sposób **całkowania numerycznego**
- ◆ Sposób **opracowania wyników**

Sformułowania brzegowe

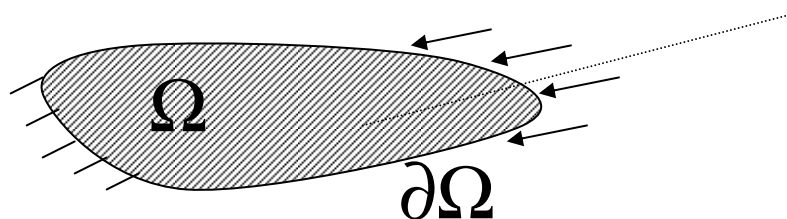
SFORMUŁOWANIE LOKALNE



$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \\ \mathcal{G}u = g \end{cases} \quad u = u(P) \quad \begin{cases} P \in \Omega \\ P \in \partial\Omega \end{cases}$$

$\mathcal{L}, \mathcal{G}$ - operatory różniczkowe
 n -tego i m -tego rzędu

SFORMUŁOWANIA GLOBALNE



FUNKCJONAŁ

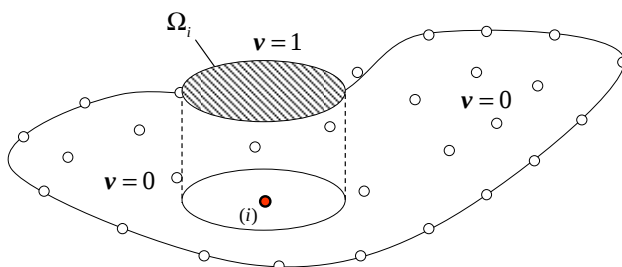
$$I(u) = \frac{1}{2} B(u, u) - Lu$$

RÓWNANIE WARIACYJNE

$$B(u, v) = L(v) \quad \text{for } v \in V$$

$$B(u, v) \geq L(v) \quad \text{for } v \in V_{\text{adm}}$$

SFORMUŁOWANIA MIESZANE (NP. GLOBALNO – LOKALNE)

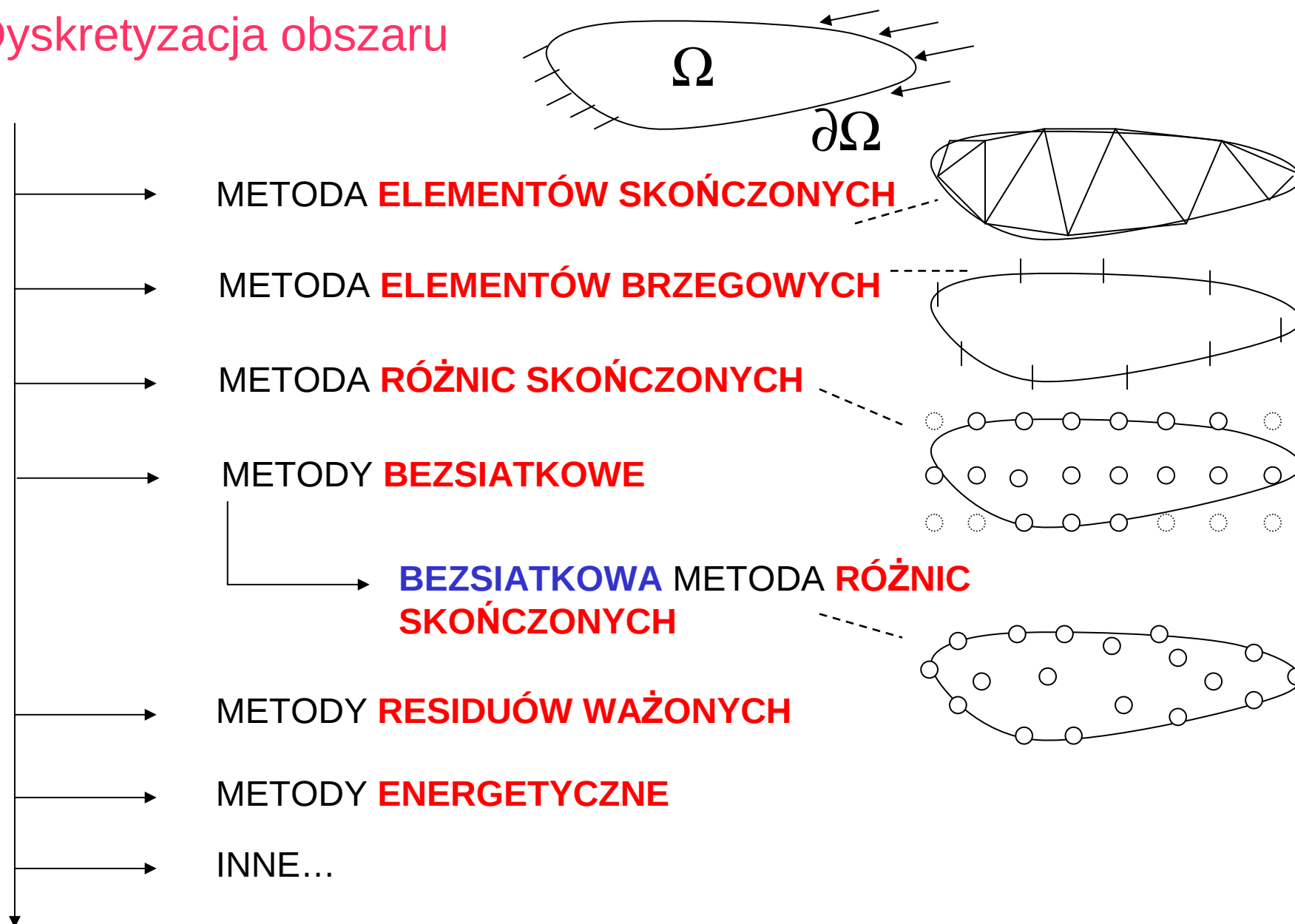


ZASADA **WARIACYJNA** SPEŁNIONA W
PODOBSZARACH Ω_i PRZYPISANYCH
KOLEJNYM WĘZŁOM

$$b(u, v) = l(v)$$

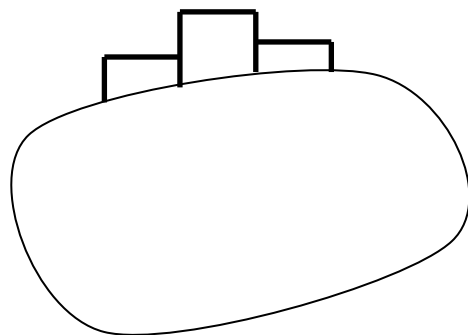
$$v \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, N$$

Dyskretyzacja obszaru

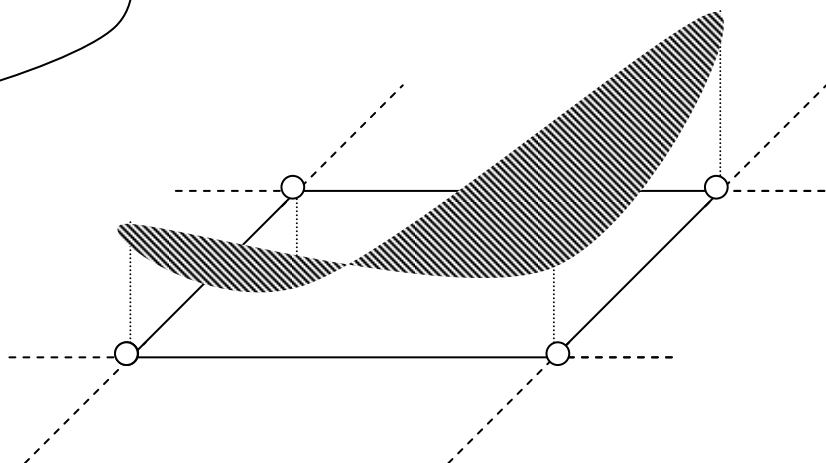


Aproksymacja rozwiązania

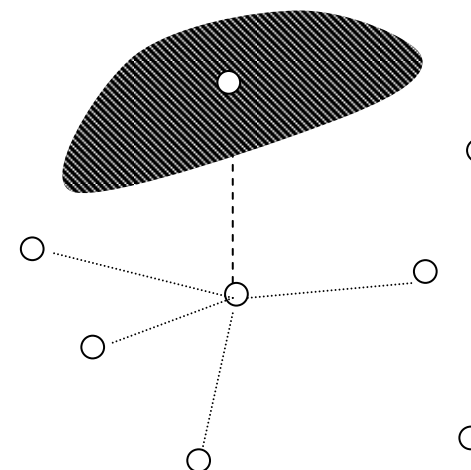
Metody brzegowe



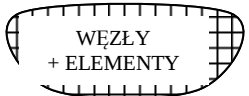
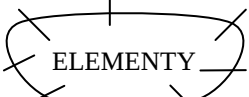
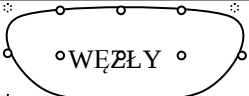
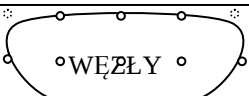
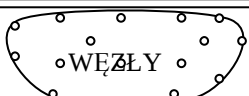
Metody elementowe



Metody bezsiatkowe



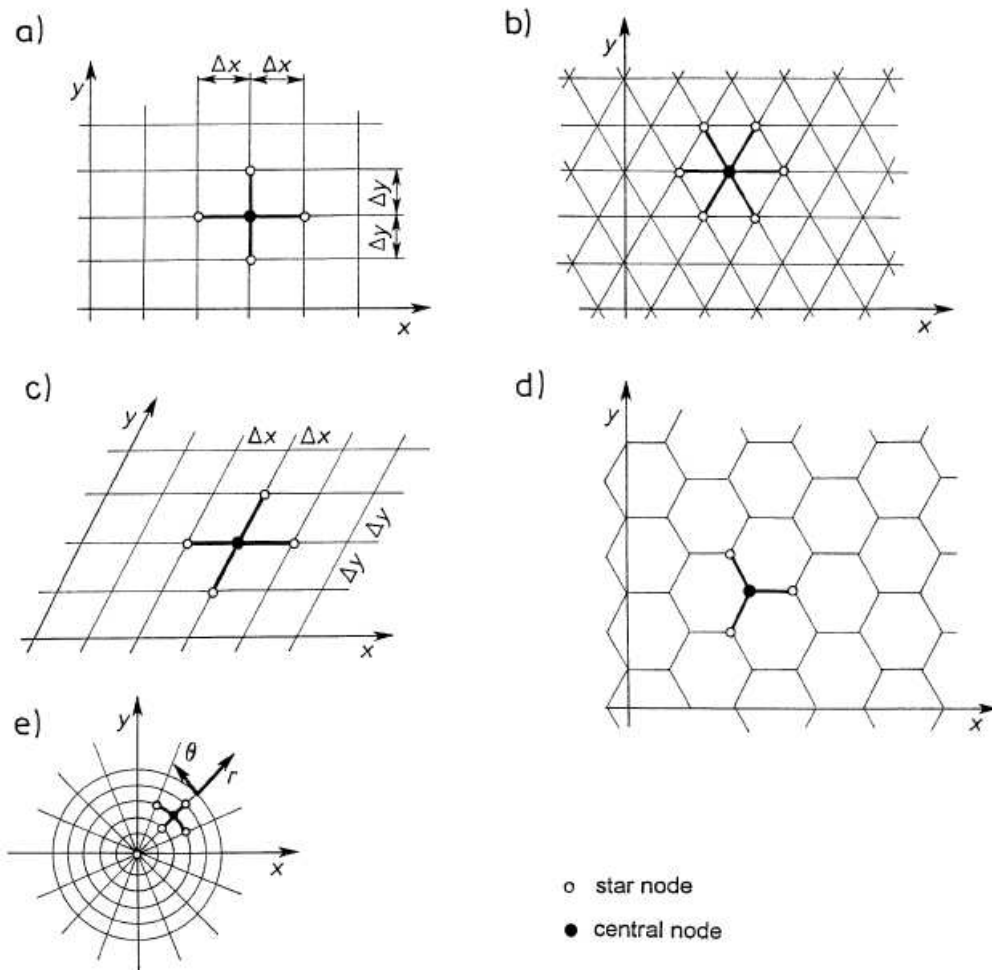
Klasyfikacja metod komputerowych

NAZWA METODY	SFOR-MUŁOWANIE	PODSTAWA DYSKRETYZACJI	SPOSÓB DYSKRETYZACJI	SPOSÓB APROKSYMACJI	CAŁKOWANIE NUMERYCZNE	OPRACOWANIE WYNIKÓW
METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH	SŁABE (WARIACYJNE / FUNKCJONAL)			INTERPOLACJA F.KSZTAŁTU W ELEMENCIE	W ELEMENCIE	MES + INNE
METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH	RÓWNANIE CAŁKOWE			INTERPOLACJA BRZEGOWA	NA BRZEGU (CAŁKI WŁAŚCIWE I NIEWŁAŚCIWE)	MEB + INNE
METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH	MOCNE (LOKALNE)			WZORY RÓŻNICOWE	NIE JEST POTRZEBNE	APROKSYMACJA
WARIACYJNA MRS	SŁABE (WARIACYJNE)			WZORY RÓŻNICOWE	DOKOŁA LUB POMIĘDZY WĘZŁAMI	APROKSYMACJA
METODY BEZSIATKOWE (BEZSIATKOWA MRS)	MOCNE / SŁABE (WARIACYJNE)			METODA MWLS	RÓŻNE SPOSOBY	MWLS
METODY RESIDUALNE (GALERKIN, NK, KOL.)	SŁABE (WARIACYJNE)	BRAK	BRAK	KOMBINACJA LINIOWA F.BAZOWYCH	ANALITYCZNIE	INTERPOLACJA
METODY ENERGETYCZNE (RITZ)	SŁABE (FUNKCJONAL)	BRAK	BRAK	KOMBINACJA LINIOWA F.BAZOWYCH	ANALITYCZNIE	INTERPOLACJA

MRS (lokalna) na tle MES

	MRS lokalna	MES
<i>Sformułowanie problemu brzegowego</i>	Lokalne $\begin{cases} \mathcal{L}u = f \\ \mathcal{G}u = g \end{cases} \quad u = u(P) \quad \begin{cases} P \in \Omega \\ P \in \partial\Omega \end{cases}$	- Wariacyjne $B(u, v) = L(v)$ for $v \in V$ - Funkcjonał $I(u) = \frac{1}{2} B(u, u) - Lu$
<i>Generacja siatki</i>	Typ (prostokątna, trójkątna) + moduł h	Specjalne programy - generatory
<i>Aproksymacja</i>	Generacja wzorów różnicowych dla pochodnych z równania	Interpolacja rozwiązania w elemencie za pomocą funkcji kształtu
<i>Generacja równań dyskretnych</i>	Kolokacja	Spełnienie równania wariacyjnego w elemencie
<i>Całkowanie</i>	Brak	Kwadratury Gaussa w elemencie
<i>Warunki brzegowe</i>	Dodatkowe wzory różnicowe brzegowe	Modyfikacja układu równań
<i>Macierz Układu równań</i>	Na ogół niesymetryczna	Symetryczna pasmowa

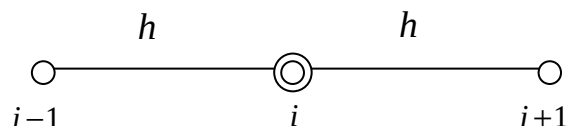
Etapy MRS – generacja siatki



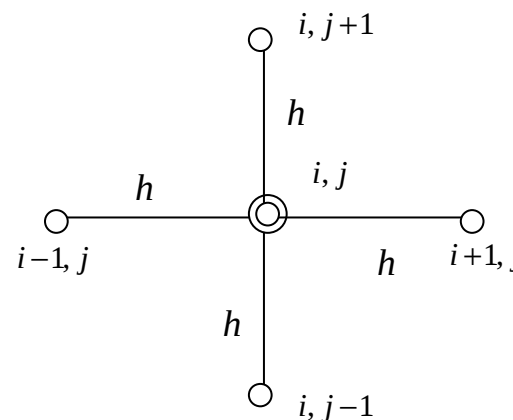
Źródło: Orkisz J., „Finite Difference Method”, part III in *Handbook of Computational Mechanics*, ed: Kleiber, Springer, 1998

Etapy MRS – generacja wzorów różnicowych

1D:



2D:



Sposoby generacji:

- Składanie wzorów złożonych ze wzorów prostych:

$$u'_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad u''_i \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \rightarrow u'''_i = (u''_i)'$$

- Wymuszenie zgodności dla jednomianów
- Interpolacja i różniczkowanie
- Metoda współczynników nieoznaczonych (metoda Taylora)

$$u''_i \approx au_{i-1} + bu_i + cu_{i+1}$$

$$\begin{cases} u_{i-1} = u_i - hu'_i + 0.5h^2u''_i + \dots \\ u_i = u_i \\ u_{i+1} = u_i + hu'_i + 0.5h^2u''_i + \dots \end{cases}$$

$$u''_i \approx u_i \underbrace{(a+b+c)}_0 + u'_i \underbrace{(-ah+ch)}_0 + u''_i \underbrace{(0.5h^2a+0.5h^2c)}_1$$

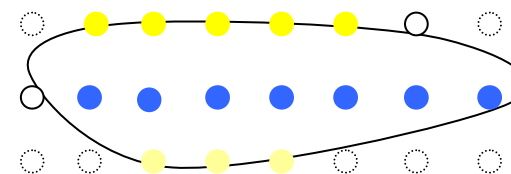
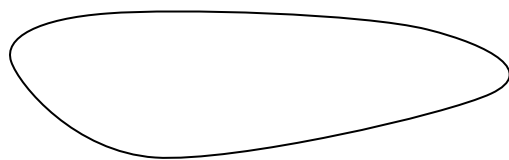
$$\begin{cases} a = \frac{1}{h^2} \\ b = \frac{-2}{h^2} \\ c = \frac{1}{h^2} \end{cases}$$

Etapy MRS – generacja równań różnicowych

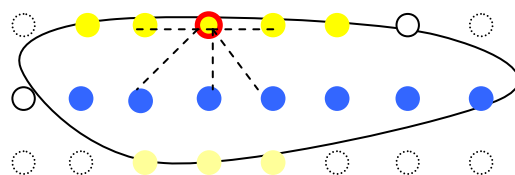
$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \\ \mathcal{G}u = g \end{cases} \quad u = u(P) \quad \begin{cases} P \in \Omega \\ P \in \partial\Omega \end{cases}$$

→
Kolokacja
we węzłach

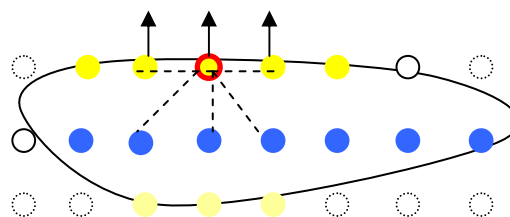
$$\begin{cases} Lu_i = f_i \\ Gu_i = g_i \end{cases} \quad \begin{cases} P_i \in \Omega_i \\ P_j \in \partial\Omega_j \end{cases}$$



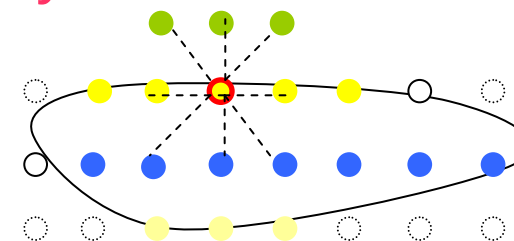
Uwzględnienie warunków brzegowych



Operator budowany tylko
na **węzłach wewnętrznych**



Operator budowany
na **węzłach wewnętrznych**
- z wykorzystaniem
uogólnionych stopni swobody



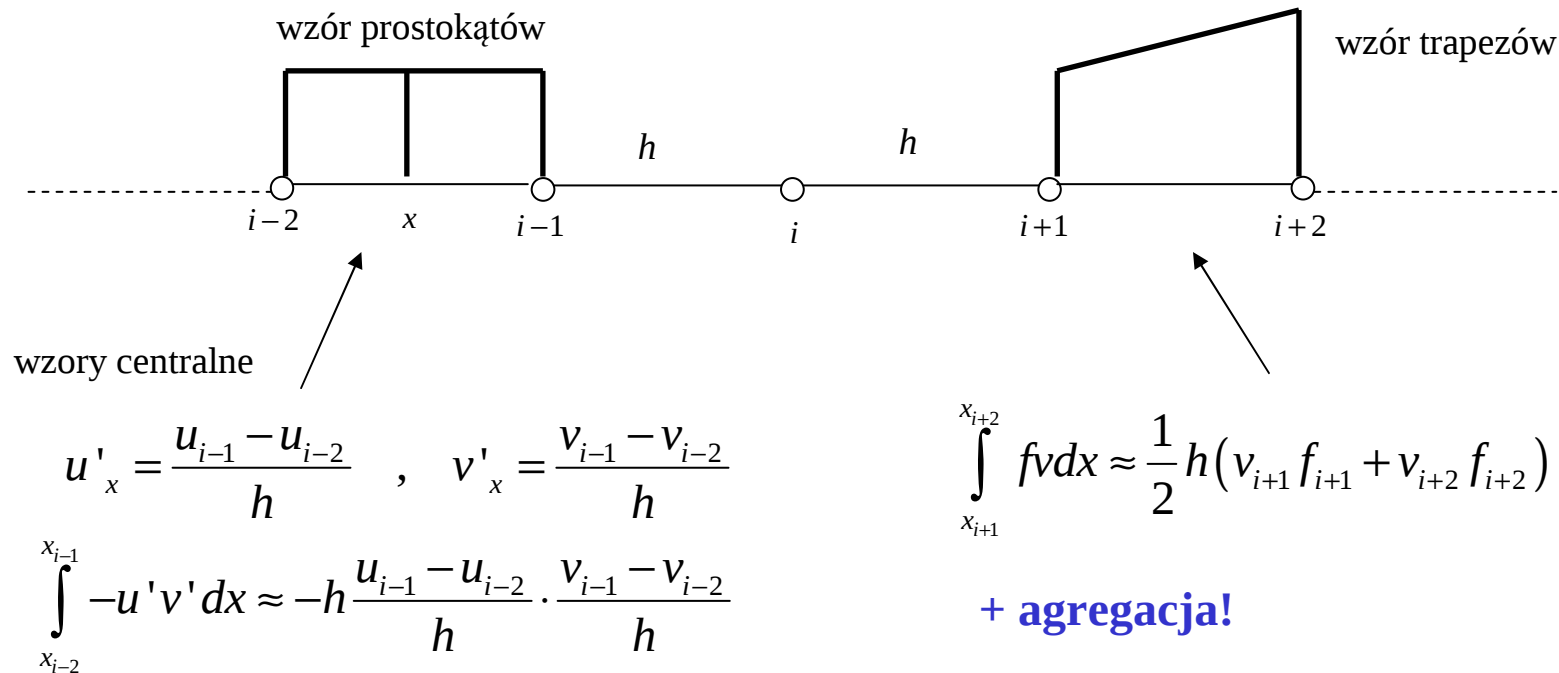
Operator budowany
na **węzłach wewnętrznych**
i **zewnętrznych**
„fikcyjnych” węzłach

MRS wariacyjna – numeryczne całkowanie

$$I(u) = \frac{1}{2} B(u, u) - Lu \quad \text{lub} \quad B(u, v) = L(v) \quad \text{for } v \in V$$

Np.

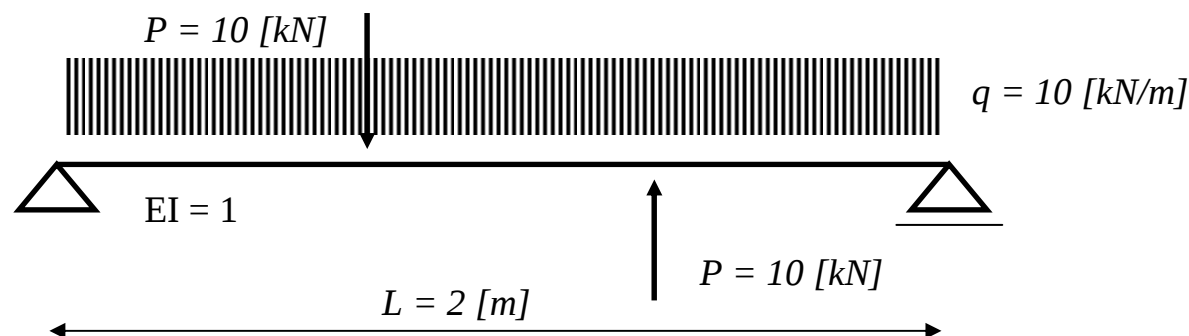
$$I(u) = \frac{1}{2} \int_a^b (u')^2 + f u dx, \quad \min_{(u)} I(u) = ? \quad \text{lub} \quad \int_a^b -u' v' dx + [u' v]_a^b = \int_a^b f v dx \quad \text{for } v \in V$$



Przykład obliczeniowy – MRS w zagadnieniach 1D

Zagadnienie:

Analiza ugięć belki swobodnie podpartej dla różnych obciążeń



Sf. Lokalne:

$$u''(x) = -\frac{M(x)}{EI} \quad u(0) = u(L) = 0$$

Sf. Słabe:

$$\int_0^L u'v' dx = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} v dx, \quad v(0) = u(0) = v(L) = u(L) = 0$$

Metody:

- MRS lokalna
- MRS wariacyjna
- MES

<http://www.L5.pk.edu.pl/~slawek/SZKOMES/programy.rar>

Cele:

- Porównanie jakości rozwiązań MRS i MES
- Analiza zbieżności na siatkach regularnych

Bilans MRS i MES

MRS:

- Najstarsza metoda komputerowa
- Łatwość implementacji
- Istnienie wersji lokalnej
- Łatwa generacja siatki
- Dydaktyczny charakter
- Trudności przy krzywoliniowym brzegu
- Nie można przeprowadzić adaptacji
- Nie można lokalnie zagęszczać siatki
(naroża, obciążenia skupione, ...)
- Trudna do automatyzacji

MES:

- Najbardziej powszechna
metoda komputerowa
- Podstawa pakietów komputerowych
- Szerokie pole zastosowań
- Ogromna biblioteka
elementów skończonych
- Duża dokładność rozwiązania
- Kłopotliwa generacja siatki dla obszarów
o skomplikowanej geometrii
- Mało efektywna przy częstej przebudowie siatki
- Uwzględnianie nieliniowości geometrycznych
(duże przemieszczenia, ...)
- Ruchomy brzeg, rozwój szczeliny
- Zjawisko blokady

Bezsiatkowa (Uogólniona) Metoda Różnic Skończonych BMRS

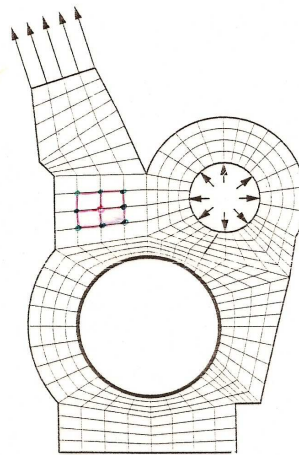
- **DOWOLNIE NIEREGULARNE CHMURY WĘZŁÓW**
(**WĘZŁY** NIE POWIĄZANE ZE SOBĄ ŻADNĄ STRUKTURĄ
TYPU **SIATKA REGULARNA** CZY **ELEMENT**)
- KAŻDY **WĘZŁ** MOŻE BYĆ **USUNIĘTY, DODANY, PRZESUNIĘTY**
(ADAPTACJA TYPU h , OBCIĄŻENIE SKUPIONE, SZCZELINA, WĘDRUJĄCY BRZEG, ...)
- ZAMIANA **OPERATORÓW RÓŻNICZKOWYCH** NA **RÓŻNICOWE**
- **APROKSYMACJA LOKALNA** JEST OPARTA NA GRUPIE **WĘZŁÓW**, DOKONYWANA
METODĄ NAJMNIEJSZYCH WĄŻONYCH KROCZĄCYCH KWADRATÓW

*Cecha
metod bezsiatkowych MB*

Cecha metod różnicowych MRS

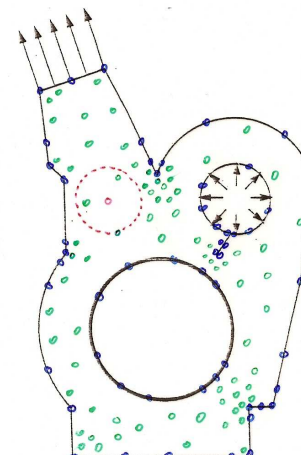
Cecha metody BMRS

METODA
ELEMENTÓW
SKOŃCZONYCH



$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{nelem} \bar{\Omega}_k$$

METODA
BEZSIATKOWA
(np. BMRS)



Klasyfikacja metod bezsiatkowych (kryterium: sposób lokalnej aproksymacji)

(i) METODY OPARTE NA METODZIE LOKALNEJ APROKSYMACJI WAŻONYMI NAJMNIEJSZYM KROCZĄCYMI KWADRATAMI (MWLS)

- BEZSIATKOWA METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH (BMRS)

Meshless Finite Difference Method (MFDM)

Jensen 72; Nay, Utku 72, Wyatt et al.. 75; Perrone et al.. 75;

Liszka, Orkisz 76

- ELEMENT FREE GALERKIN (EFG)

Belytschko et al.. 94

- DIFFUSIVE ELEMENT METHOD (DEM)

Villon et al. 92

- FINITE POINT METHOD (FPM)

Oñate, Idelsohn et al. 94

(ii) METODY APROKSYMACJI JĄDRA CAŁKOWEGO

- SMOOTH PARTICLE HYDRODYNAMICS (SPH)

Lucy 77; Gingold, Monaghan 77

- REPRODUCING KERNEL PARTICLE METHOD (RKPM)

Liu et al. 96

(iii) METODY PODZIAŁU JEDNOŚCI

- PARTITION OF UNITY FEM (PUFEM)

Babushka, Melenk 96

- HP-CLOUDS

Duarte, Oden 95

(iv) METODY ELEMENTÓW NATURALNYCH (MEN)

Traversoni 94; Braun, Sambridge 95; Sukumar et al. 98

(v) PARTICLE IN CELL TYPE METHODS (PIC)

Brackbill et al. 86; Li, Liu review – 2002

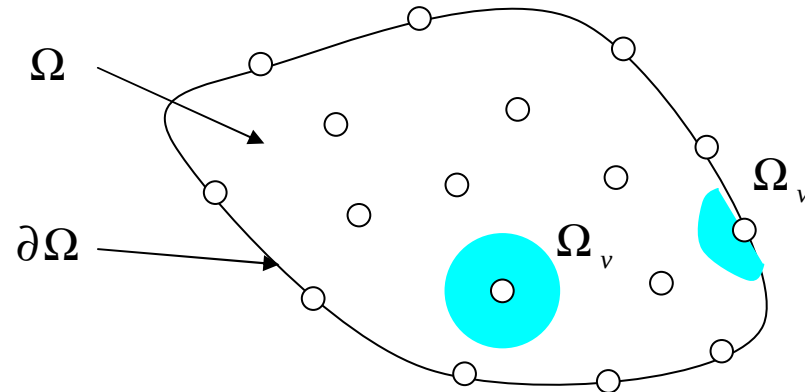
(vi) INNE METODY BEZSIATKOWE

- MESHLESS LOCAL PETROV – GALERKIN

Atluri et al. 98

- FINITE VOLUME METHODS

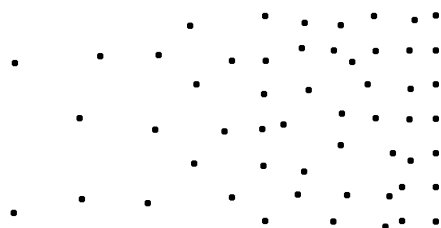
Heinrich 88



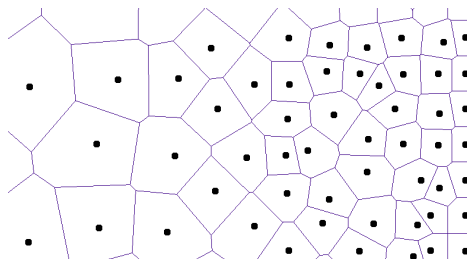
1.	MESHLESS FINITE DIFFERENCE METHOD	MFDM
2.	SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS (SPH)	SPH
3.	FINITE SUPPORT KERNAL METHOD (FSKM)	SPH
4.	MULTIPLE SCALE REPRODUCING KERNAL METHOD (MSRKM)	SPH
5.	WAVELET REPRODUCING KERNAL PARTICLE METHOD (WRKPM)	SPH
6.	MOVING LEAST SQUARE REPRODUCING KERNAL METHOD (MLSRKM)	SPH
7.	PSEUDO DIVERGENCE-FREE ELEMENT FREE GALERKIN METHOD	MFDM
8.	CORRECTED SMOOTH PARTICLE HYDRODYNAMICS (CSPH)	SPH
9.	MLSPH – METHOD: MOVING LEAST SQUARES	SPH
10.	MESHFREE METHODS (MM)	MFDM
11.	HAMILTONIAN PARTICLE – MESH METHOD	PM
12.	MULTI-LEVEL MESHLESS METHOD	MFDM
13.	PARTICLE-PARTITION OF UNITY METHOD (PPUM)	PU
14.	FINITE VOLUME – PARTICLE METHOD (FVPM)	FV
15.	UPWIND FINITE POINT SET METHOD (UFPSM)	MFDM
16.	GALERKIN PARTICLE METHOD (GPM)	PM
17.	DISTINCT ELEMENT METHOD (DEM)	
18.	ADVANCE DIFFRACTION METHODS (ADM)	EFG
19.	STOCHASTIC WEIGHTED PARTICLE METHOD (SWPM)	SPH
20.	FINITE-COVER BASED ELEMENT FREE METHOD (FCEFM)	EFG

21. FINITE MASS METHOD (FMM)	PIC
22. MULTI-SCALE MESHFREE PARTICLE METHOD (MSMPM)	RBF-PM
23. MULTI-QUADRICS METHOD (MQM)	RBF-PM
24. RADIAL BASIS FUNCTION – BASED ON MESHLESS BOUNDARY KNOT METHODS	MFDM
25. BOUNDARY PARTICLE METHODS (BPM)	BMP
26. MATRIX-FREE MULTILEVEL MOVING LEAST SQUARES METHODS	MFDM
27. MOVING LEAST-SQUARE REPRODUCING KERNEL METHOD (MLSRKM)	KPM
28. RBF COLLOCATION METHODS	KM
29. DIFFUSE ELEMENT METHOD (DEM)	
30. ELEMENT FREE GALERKIN (EFG)	EFG
31. REPRODUCING KERNEL PARTICLE METHOD (RKPM)	KPM
32. FINITE POINT METHOD, FREE MESH METHOD (FPM)	FDM
33. FINITE SPHERES METHOD (FSM)	PU
34. PARTITION OF UNITY FINITE ELEMENT (PUFEM)	PU
35. EXTENDED FEM (XFEM)	PU
36. FINITE VOLUME PARTICLE – IN – CELL (PIC)	PIC
37. MATERIAL POINT METHOD (MPM)	PIC
38. LOCAL BOUNDARY INTEGRAL EQUATION (LBIE)	
39. MESHLESS LOCAL PETROV-GALERKIN METHOD (MLPGM)	MLPG
40. NATURAL ELEMENT METHOD (NEM)	NEM
41. CORRECTIVE SPH (CSPH)	SPH

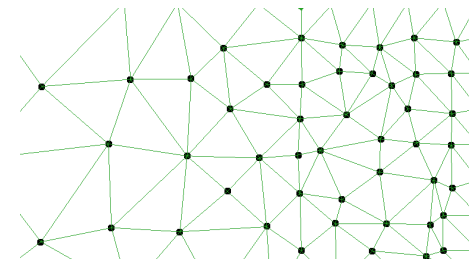
Generacja węzłów



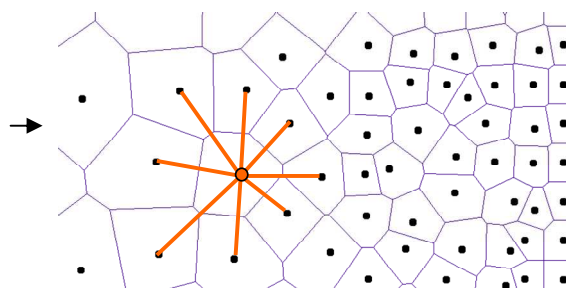
Topologia - wielokąty



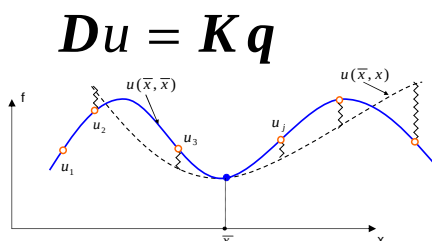
Topologia - trójkąty



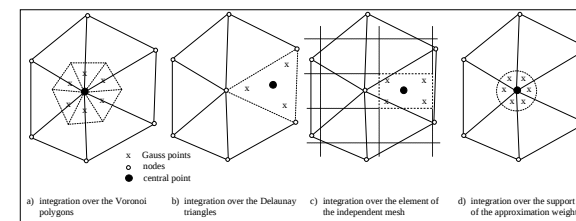
Generacja gwiazd



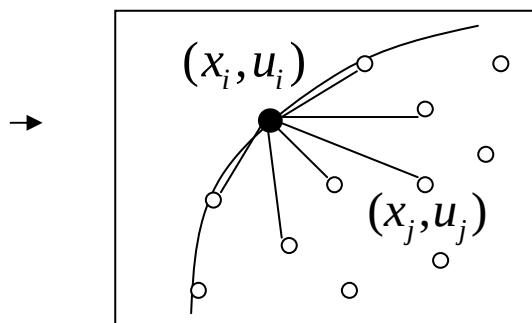
Generacja wzorów różnicowych (MWLS)



Całkowanie numeryczne



Uwzględnienie warunków brzegowych



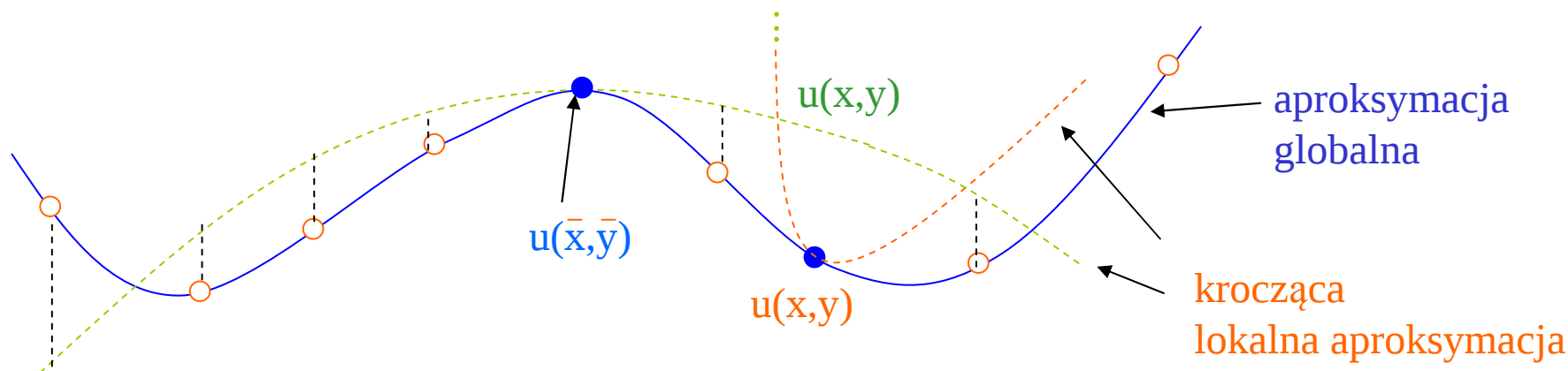
Generacja równań różnicowych

- kolokacja
- minimum funkcjonału
- równanie wariacyjne

Rozwiązanie układu Równań

+
Postprocessing

Aproksymacja MWLS



Aproksymacja lokalna:

$$u = \bar{u} + \sum_j \frac{1}{l!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^l u \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & h & k & \frac{h^2}{2} & hk & \frac{k^2}{2} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ \bar{u}_{xx} \\ \dots \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{p}^t \mathbf{D}u + e \approx \mathbf{p}^t \mathbf{D}u$$

Shepard 1968

Wyatt et al. 1975

Liszka, Orkisz 1976

Krok, Orkisz 1980

Lancaster and Salkauskas 1981

Nayroles, Villon 1992

Belytschko et al. 1994

Aproksymacja MWLS

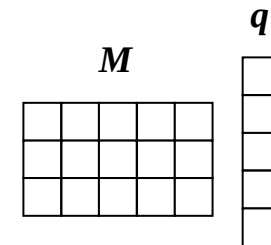
WAŻONY FUNKCJONAŁ BŁĘDU

$$J = \sum_i w(x - x_i) \left[p^t(x_i) Du(x_i) - u_i \right]^2 = (P^T Du - q)^T W (P^T Du - q)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1(x_1) & \dots & P_r(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_1(x_n) & \dots & P_r(x_n) \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_1(x - x_1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & w_n(x - x_n) \end{bmatrix}$$

$$q^T = [u_1, \dots, u_n] \quad Du^T = [\bar{u} \quad \bar{u}_x \quad \bar{u}_y \quad \bar{u}_{xx} \quad \dots]$$

$$\frac{\partial I}{\partial Du} = (P^T Du - q)WP = 0 \rightarrow Du = (P^T WP)^{-1} P^T Wq = Mq$$



gdzie $M = (P^T WP)^{-1} P^T W$ **Macierz wzorów różnicowych**

skąd

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) u_i$$

$$\Phi_i(x) = p(x) M^{-1}(x) P_i(x) W(x - x_i)$$

Aproksymacja MWLS

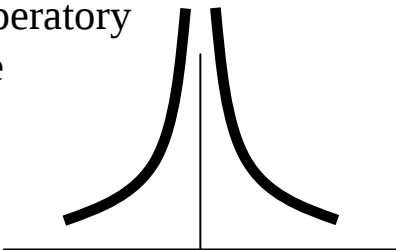
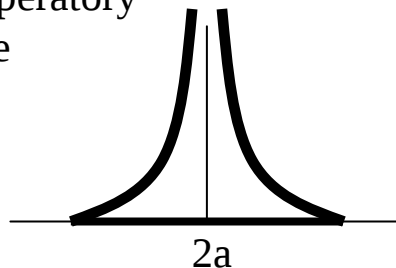
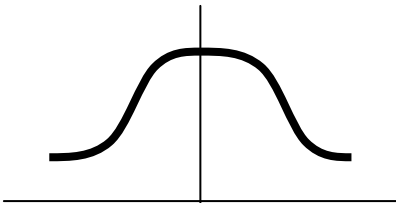
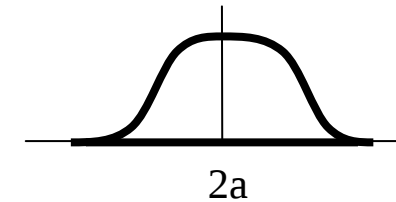
Pseudo - funkcja kształtu

Aproksymacja MWLS

FUNKCJE **WAGOWE**

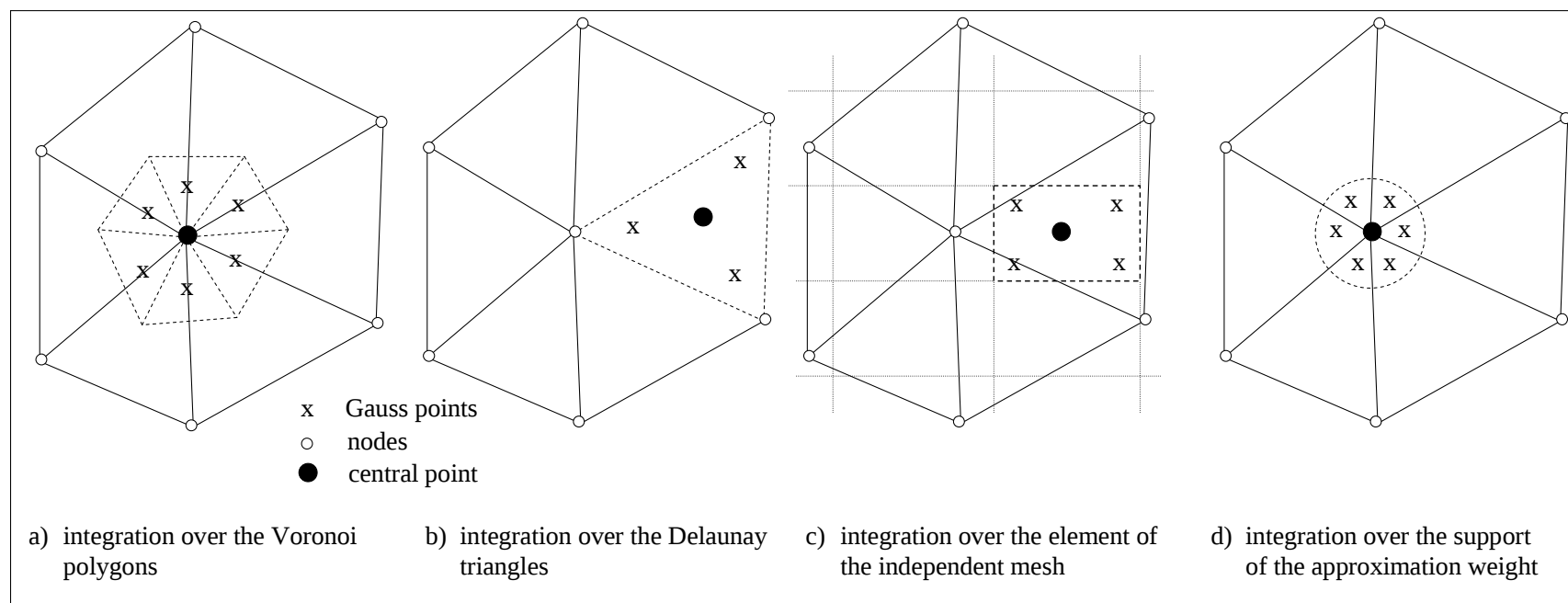
$$w(x^* - x_I) = f(d) \quad d = \|x - x_I\| \quad \text{powszechnie stosowane}$$

KLASYFIKACJA

	nośnik nieskończony (wygodne dla obliczeń)	nośnik skończony (wygodne dla matematycznych dowodów)
osobliwe interpolacja	BMRS: operatory różnicowe 	BMRS: operatory różnicowe 
nieosobliwe wygładzanie	BMRS: wygładzanie danych 	EFG, metody jądrowe, hp-clouds BMRS: wygładzanie danych 

Całkowanie w BMRS

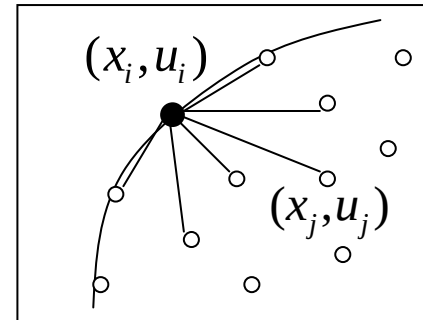
- CAŁKOWANIE **DOKOŁA WĘZŁA** – PO WIELOKĄTACH **VORONOI**
(NAJLEPSZE DLA PARZYSTYCH OPERATORÓW) – TAK JAK W KLASYCZNEJ MRS
- CAŁKOWANIE **POMIĘDZY WĘZŁAMI** – PO TRÓJKĄTACH **DELAUNAY** (2D)
(NAJLEPSZE DLA NIEPARZYSTYCH OPERATORÓW) – TAK JAK W MES
- CAŁKOWANIE PO **SIATCE TŁA** –
NIEZALEŻNEJ OD WĘZŁÓW – TAK JAK W METODACH BEZSIATKOWYCH
- CAŁKOWANIE PO **STREFACH WPLYWU**
FUNKCJI WAGOWYCH APROKSYMACJI MWLS – TAK JAK W MET. BEZSIATK.



Warunki brzegowe w BMRS

- użycie jedynie **wewnętrznych węzłów** – słaba jakość

$$u_i = \sum_{j=1}^m a_j \cdot u_j$$

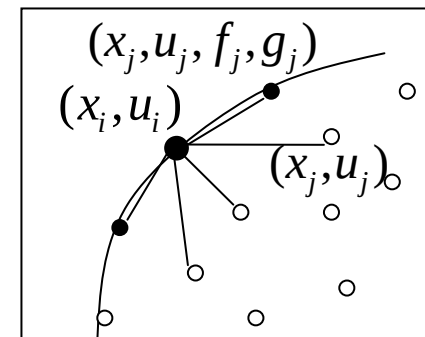


- użycie **węzłów wewnętrznych** z warunkiem brzegowym i równaniem z obszaru zapisanym na brzegu

$$Lu_i = f_i, \quad Gu_i = g_i, \quad P_i \in \partial\Omega$$

- użycie **węzłów wewnętrznych** i uogólnionych stopni swobody

$$u_i = \sum_{j=1}^{m_1} a_j \cdot u_j + \sum_{j=1}^{m_2} b_j \cdot u_j^{(k)}$$

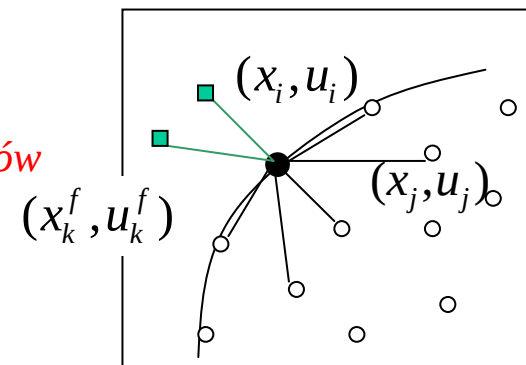


- **podjęcie wielopunktowe**

$$\sum_{j=1}^{m_1} a_j \cdot u_j = \sum_{j=1}^{m_2} b_j \cdot f_j$$

- użycie **wewnętrznych** i dodatkowych **zewnętrznych węzłów**

$$u_i = \sum_{j=1}^{m_1} a_j \cdot u_j + \sum_{k=1}^{m_2} b_k \cdot u_k^f,$$



- kombinacje powyższych sposobów

Rozwinięcia BMRS

- ANALIZA BŁĘDU A'POSTERIORI
- ADAPTACJA SIATKI
- PODEJŚCIE WIELOSIATKOWE (MULTIGRID)
- UOGÓLNIONE STOPNIE SWOBODY
- APROKSYMACJA PODWYŻSZONEGO RZĘDU

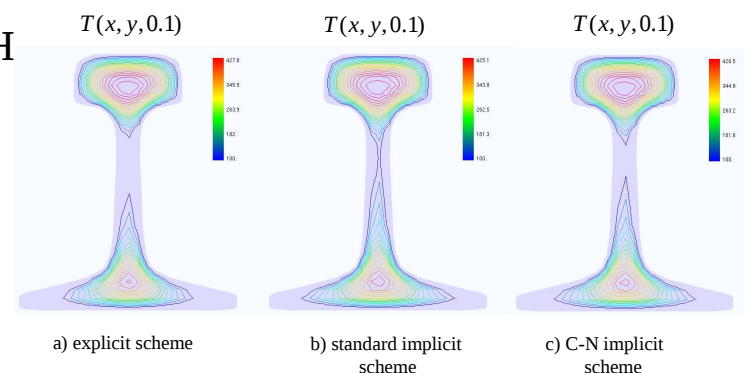
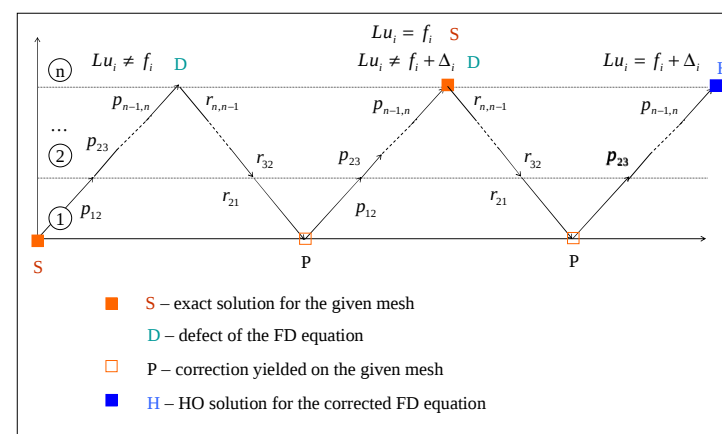
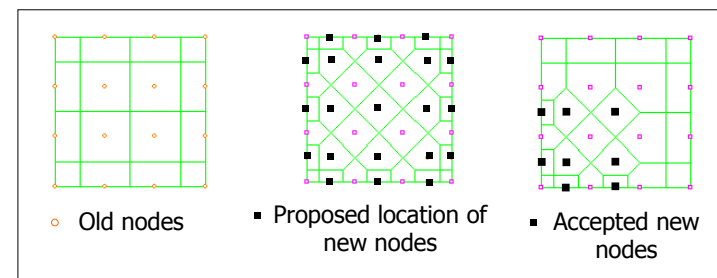
• BMRS NA ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWEJ

• KOMBINACJE BMRS / MES

• WYGŁADZANIE DANYCH EKSPERYMENTALNYCH I NUMERYCZNYCH

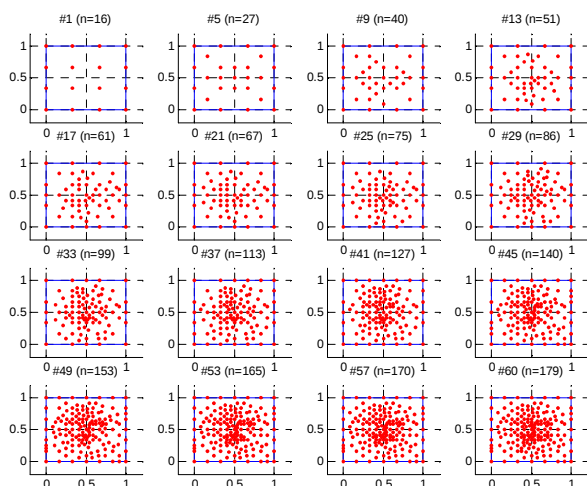
• ROZWÓJ OPROGRAMOWANIA

• ZASTOSOWANIA INŻYNIERSKIE



Polepszenie jakości rozwiązania BMRS

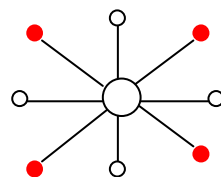
Zwiększenie **liczby węzłów**



(Liszka, Orkisz, 1978
Przybylski, Leżański, Orkisz, 1994
Milewski, Orkisz, 2005)

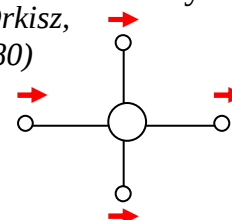
Podniesienie **rzędu aproksymacji**

Operatory
wyższego rzędu

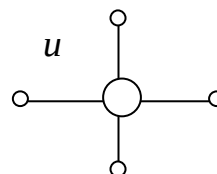


(Hackbush, 1981)

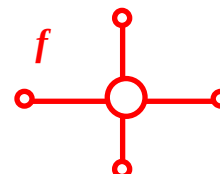
(Liszka, Orkisz,
Krok, 1980)



(Jaworska,
Orkisz, 2004)



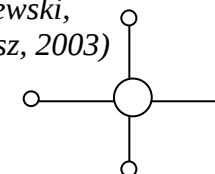
Podejście
wielopunktowe



=

Aproksymacja
wyższego rzędu

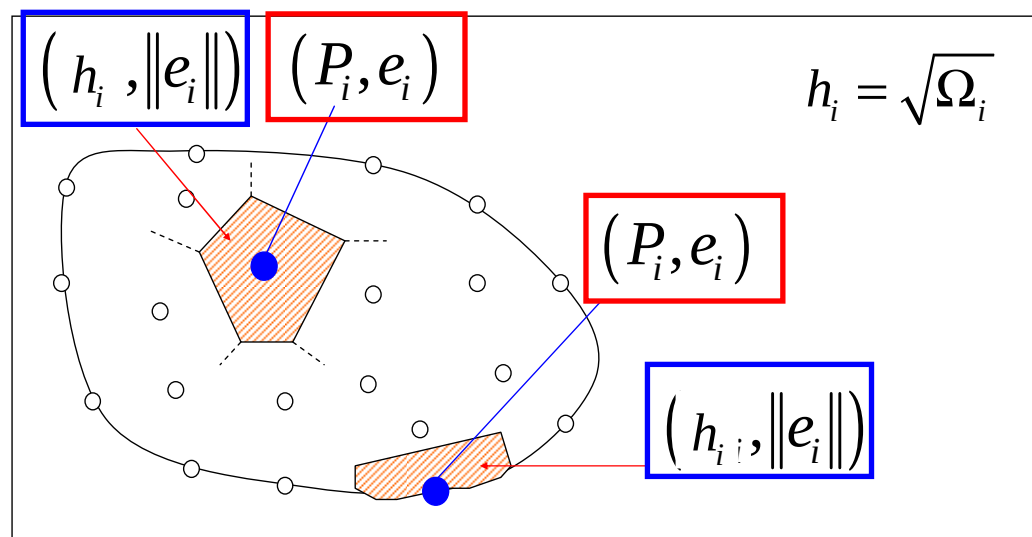
(Milewski,
Orkisz, 2003)



+ Δ

Człony **korekcyjne**

Estymacja błędu w BMRS



LOKALNY BŁĄD ROZWIĄZANIA

$$\begin{cases} e_i^{(LT)} = u_i^{(L)} - u_i^{(T)} \\ e_i^{(HT)} = u_i^{(H)} - u_i^{(T)} \end{cases} \rightarrow e_i^{(LH)} = u_i^{(L)} - u_i^{(H)}$$

GLOBALNY BŁĄD ROZWIĄZANIA

$$\eta_E = \sqrt{b(\bar{e}, \bar{e})} \quad , \quad \eta_{L_2} = \sqrt{\int_{\Omega} (\bar{e})^2 d\Omega}$$

LOKALNY BŁĄD RESIDUALNY

$$\bar{r} = \mathcal{L}\bar{u} - f \rightarrow \begin{cases} r_i^{(T)} = Lu_i - \Delta_i - R_i - f_i \\ r_i^{(L)} = Lu_i - f_i \\ r_i^{(H)} = Lu_i - \Delta_i - f_i \end{cases}$$

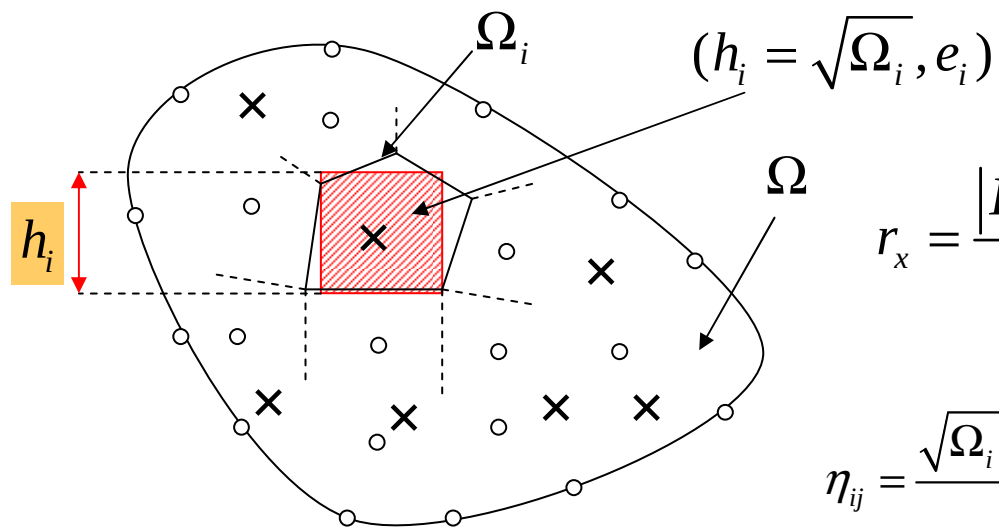
ESTYMATORY:

- **HIERARCHICZNE** (h, p, **HO**)
- **WYGŁADZENIOWE** (ZZ, **HO**)
- **RESIDUALNE** (JAWNY, NIEJAWNY)

$$i = 1 + \frac{\|e\| - \|\eta\|}{\|e\|}$$

INDEKS
EFEKTYWNOŚCI

Adaptacja węzłów w BMRS



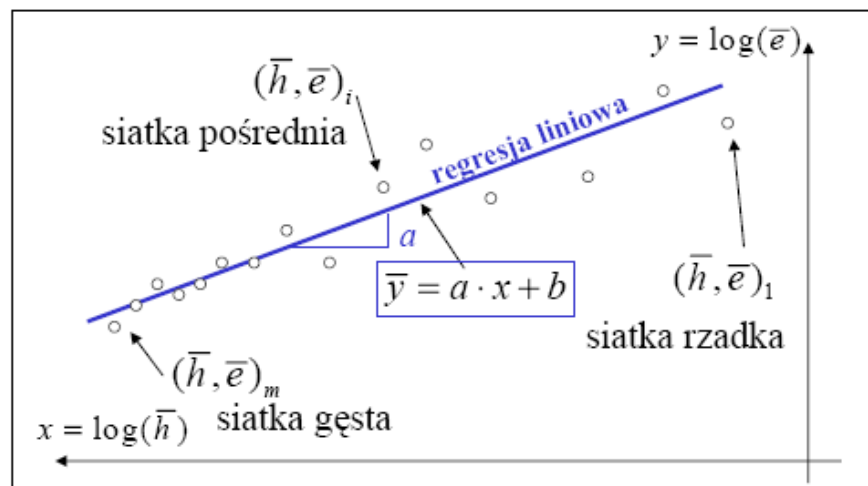
KRYTERIA GENERACJI WĘZŁÓW

• BŁĄD RESIDUALNY

$$r_x = \frac{|Lu_x - \Delta_x - f_x|}{\|f\|} > p \cdot r_{\max} \quad , \quad p \in [0,1]$$

• GŁADKOŚĆ SIATKI

$$\eta_{ij} = \frac{\sqrt{\Omega_i} - \sqrt{\Omega_j}}{\rho_{ij}} \geq \eta_{adm} \quad , \quad \rho_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$



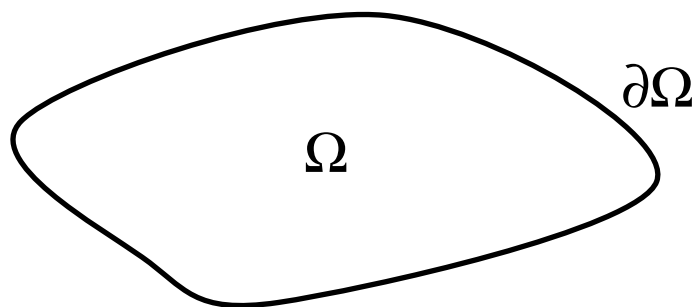
1D PROBLEMS	2D PROBLEMS
1D TEST PROBLEMS $w''(x) + a w'(x) = f(x),$ $x \in (0, 4)$ $w(0) = w(4) = 0, \quad a = 1$ 1D benchmark no.1 Polynomial function, 4th order ANALYTICAL SOLUTIONS 1D benchmark no.2 Trigonometric function ANALYTICAL SOLUTIONS 1D benchmark no.3 Trigonometric function with 10th order polynomial added ANALYTICAL SOLUTIONS RIGHT HAND SIDE FUNCTIONS	2D TEST PROBLEMS $\begin{cases} \nabla^2 w = f(x, y) & \text{in } \Omega \\ w = \bar{w} & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$ $\Omega = \{(x, y),$ $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}$ BENCHMARK NO. 1 - EXACT SOLUTION BENCHMARK NO. 2 - EXACT SOLUTION BENCHMARK NO. 3 - EXACT SOLUTION BENCHMARK NO. 4 - EXACT SOLUTION
SIMPLY SUPPORTED BEAM WITH NONLINEAR CONSTITUTIVE LAW $E(w) \cdot J \cdot w''(x) = -M(x),$ $x \in (0, L), \quad w(0) = w(L) = 0$	STRESS ANALYSIS IN PRISMATIC BAR SUBJECTED TO TORSION $\begin{cases} \nabla \Phi = -C & \text{in } \Omega \\ \Phi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$ $\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$
CANTILEVER BEAM WITH LARGE DEFLECTIONS $\frac{w''(x)}{[1 + (w'(x))^2]^{3/2}} = -\frac{1}{EJ} M(x),$ $w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad x \in (0, L)$	STRESS ANALYSIS IN RAILROAD RAIL SUBJECTED TO TORSION $\begin{cases} \nabla \Phi = -C & \text{in } \Omega \\ \Phi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$ $\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$
FUZZY SETS ANALYSIS $u''(x) = f(x), \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ}$ $u(0) = u(4) = 0, \quad x \in (0, 4)$	NONSTATIONARY HEAT FLOW ANALYSIS IN RAILROAD RAIL $\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad T(x, y, t) _{\partial\Omega} = 100$ $T(x, y, t = 0) = 500$
RELIABILITY ESTIMATION $u''(x) = f(x), \quad f(x) = -\frac{M(x, P)}{EJ}$ $u(0) = u(4) = 0, \quad x \in (0, 4)$ $R = 1 - \frac{\int_{\Omega_f} p(x) \cdot d\Omega_f}{\int_{\Omega_f + \Omega_s} p(x) \cdot d\Omega}$	

Przykład obliczeniowy – BMRS w zagadnieniach 2D

<http://www.L5.pk.edu.pl/~slawek/SZKOMES/programy.rar>

Zagadnienie:

Wyznaczenie całkowitych naprężeń skręcających w pręcie pryzmatycznym



$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

Φ FUNKCJA PRANDTL'A

Sf. Lokalne:

$$\begin{cases} \nabla\Phi = -C & \text{w } \Omega \\ \Phi = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

Sf. Słabe:

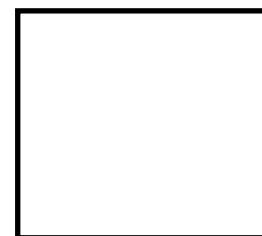
$$-\int_{\Omega} \Phi'_x v'_x + \Phi'_y v'_y d\Omega + \int_{\partial\Omega} \Phi'_x v_x n_x + \Phi'_y v_y n_y d\partial\Omega = -C \int_{\Omega} v d\Omega, \quad \Phi|_{\partial\Omega} = 0$$

Metody:

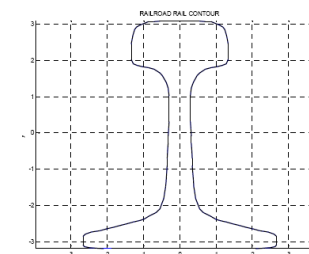
- BMRS w sformułowaniu lokalnym
- BMRS w sformułowaniu wariacyjnym

Cele:

- Porównanie jakości rozwiązań BMRS
- Analiza zbieżności na siatkach regularnych
- Przykładowa adaptacja siatki



Przekrój 1



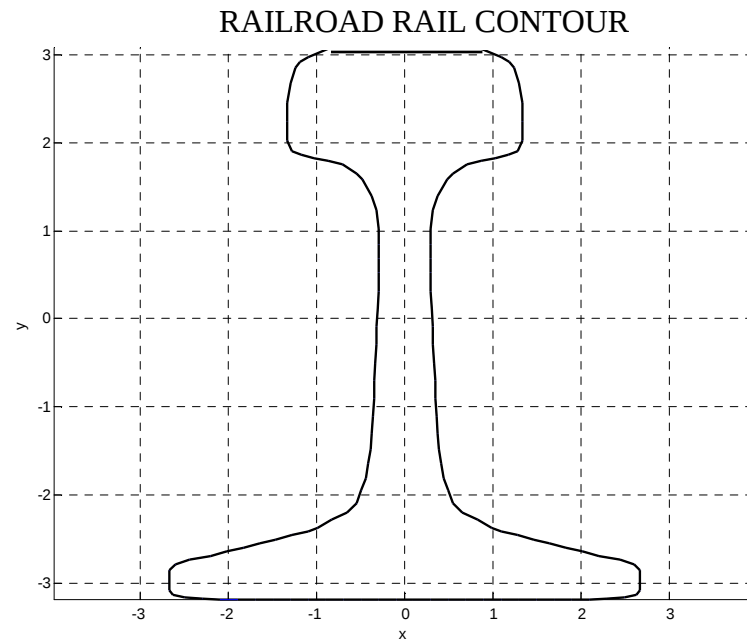
Przekrój 2

PROBLEM FORMULATION: FIND TOTAL SHEAR STRESSES

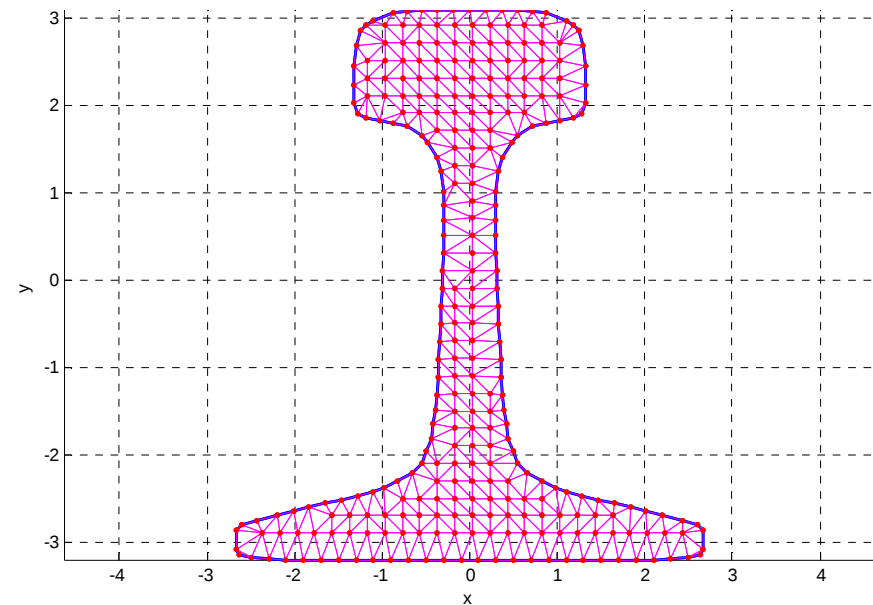
$$\begin{cases} \nabla \Phi = -C & \text{in } \Omega \\ \Phi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad \tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

Φ PRANDTL FUNCTION

IN THE RAILROAD RAIL GIVEN BELOW



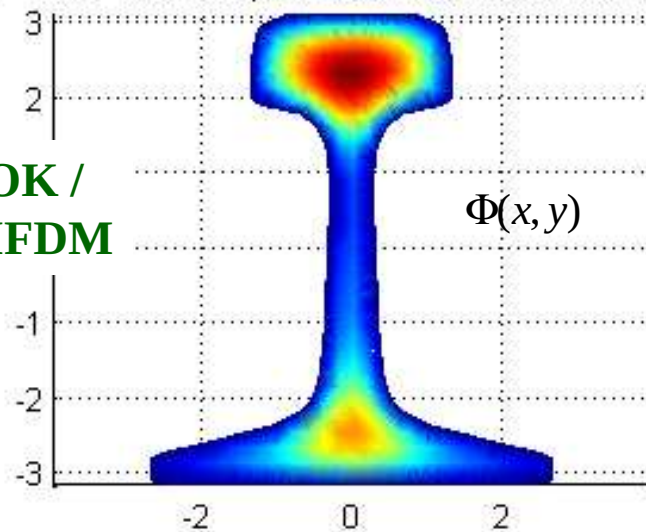
CLOUD OF NODES (300) WITH DELAUNAY TRIANGLES (463)



CLOUD OF 300 NODES WAS USED FOR CALCULATIONS

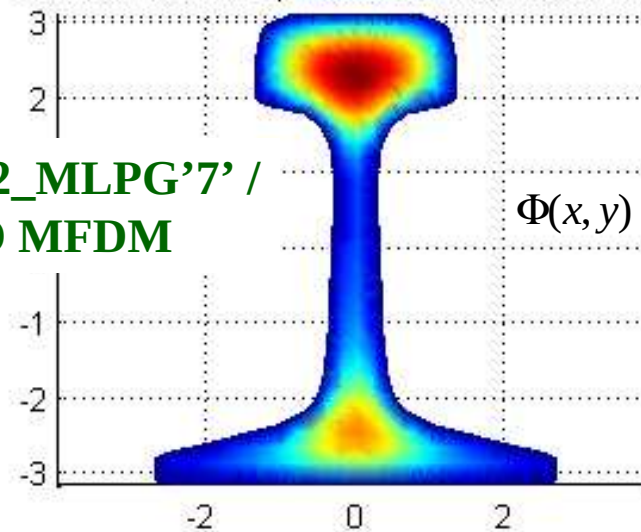
LOC : HO PRANDTL (max=0.5, mean=0.22, min=0.00096) MLPG5: HO PRANDTL (max=0.51, mean=0.22, min=0.001)

SF_LOK /
HO MFDM



$\Phi(x, y)$

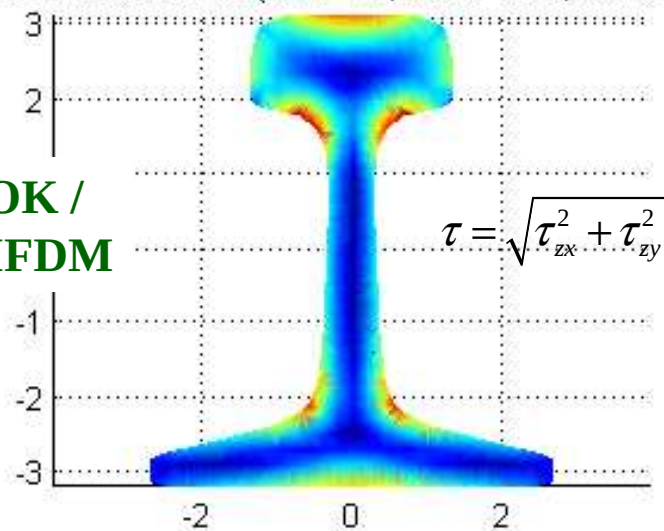
SF2_MLPG'7' /
HO MFDM



$\Phi(x, y)$

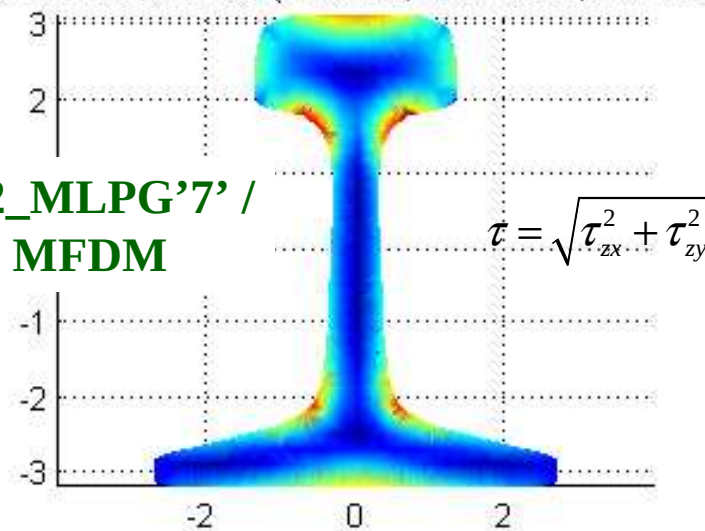
LOC : HO STRESS (max=1.3, mean=0.58, min=0.044) MLPG5: HO STRESS (max=1.4, mean=0.59, min=0.045)

SF_LOK /
HO MFDM



$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$

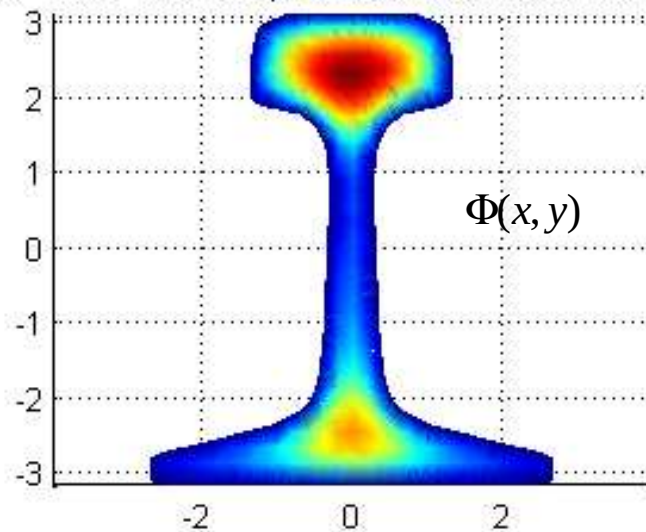
SF2_MLPG'7' /
HO MFDM



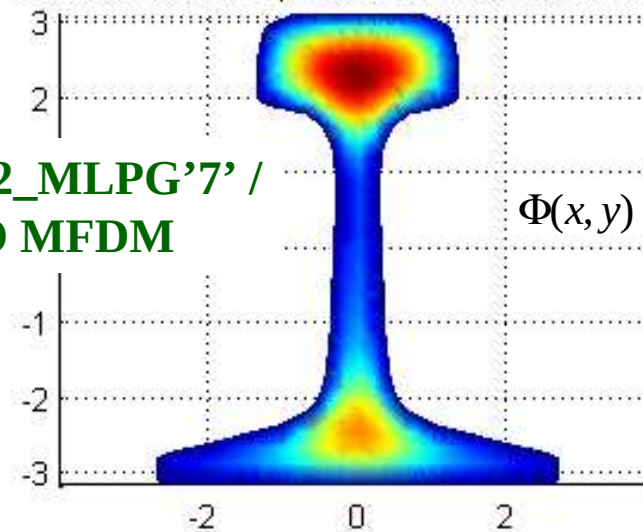
$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$

FEM

FEM : HO PRANDTL (max=0.5, mean=0.22, min=0.001) MLPG5: HO PRANDTL (max=0.51, mean=0.22, min=0.001)

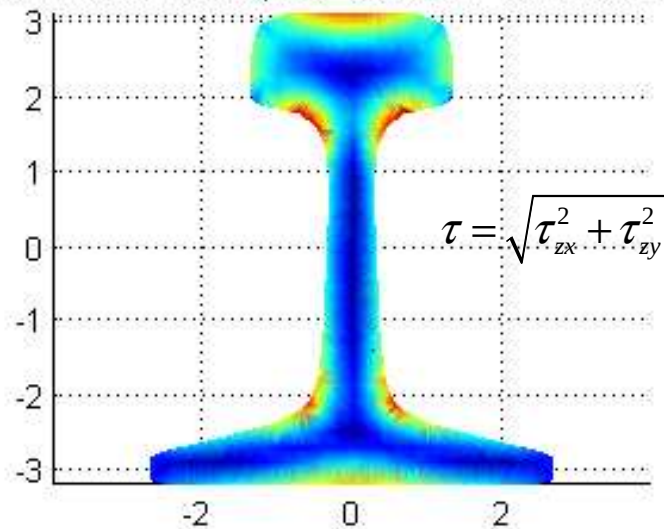


SF2_MLPG'7' /
HO MFD

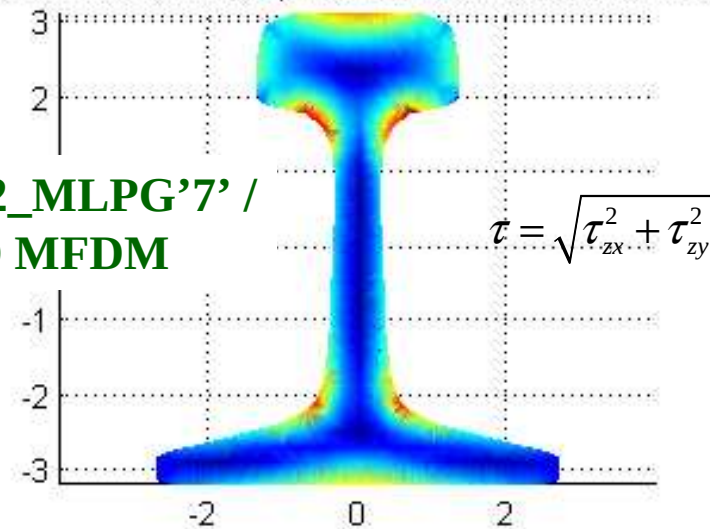


FEM

FEM : HO STRESS (max=1.3, mean=0.57, min=0.048) MLPG5: HO STRESS (max=1.4, mean=0.59, min=0.045)

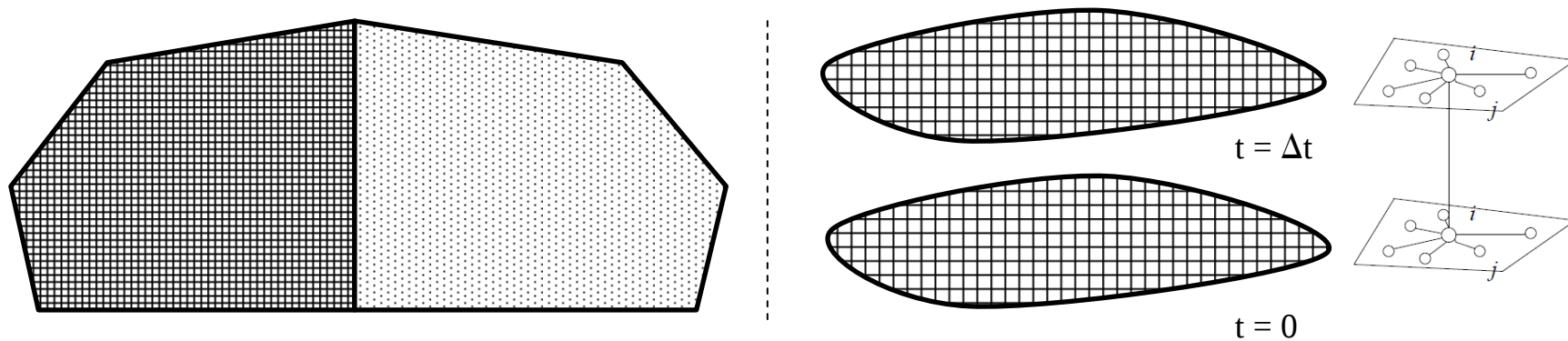


SF2_MLPG'7' /
HO MFD



Kombinacje metod (MES + BMRS)

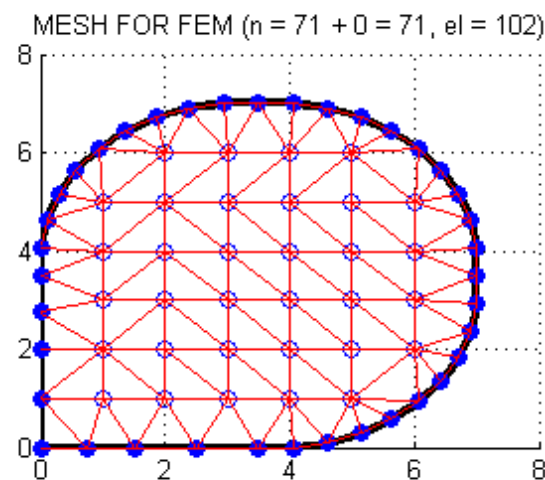
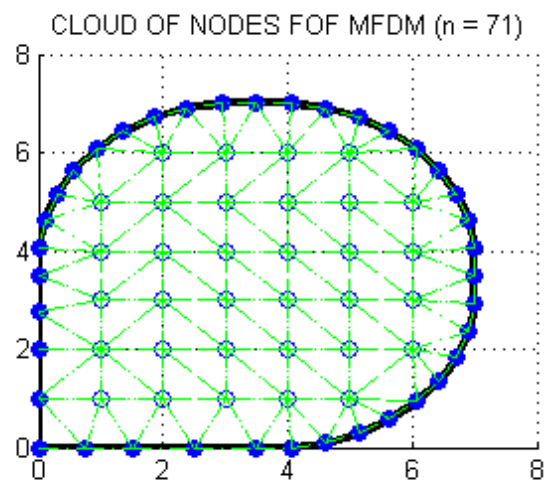
- Użycie **dwóch metod** w tym samym czasie do **dyskretyzacji** w różnych podobszarach



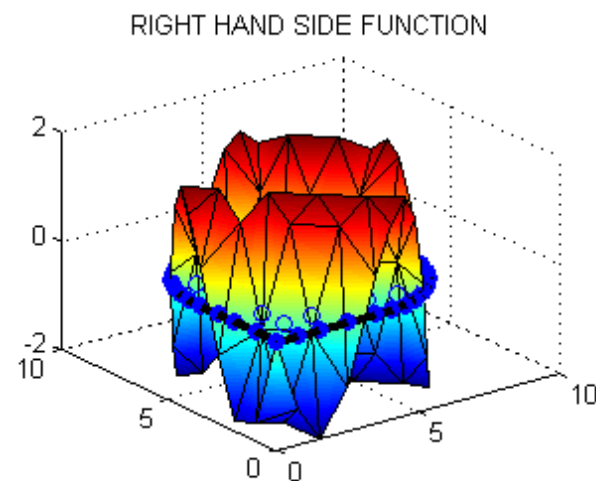
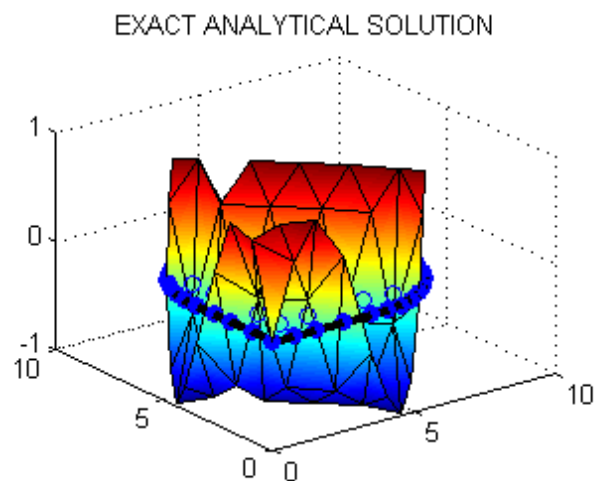
- Użycie jednej metody i drugiej metody na **różnych etapach obliczeń**, np. opracowanie wyników MES za pomocą technik BMRS
- Użycie BMRS do **generacji charakterystycznych wielkości elementowych** w MES, np. macierzy sztywności
- Użycie MES do **generacji wzorów różnicowych** poprzez różniczkowanie interpolacji

J.Krok, M.Stanuszek, J.Orkisz, „On combination of the adaptive meshless FD and FE methods in the NAFDEM system of analysis of b.v. problem”, 8th US National Congress on Computational Mechanics, Austin, July 25-27

Kombinacje metod (MES + BMRS) - przykład

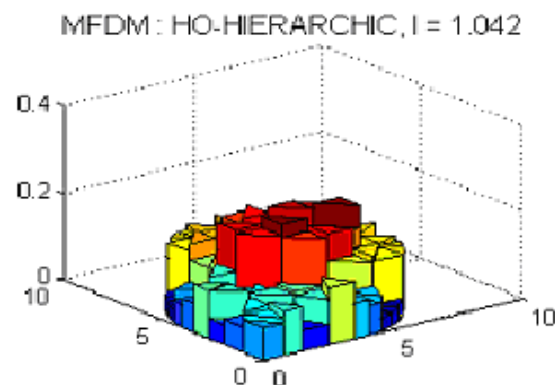
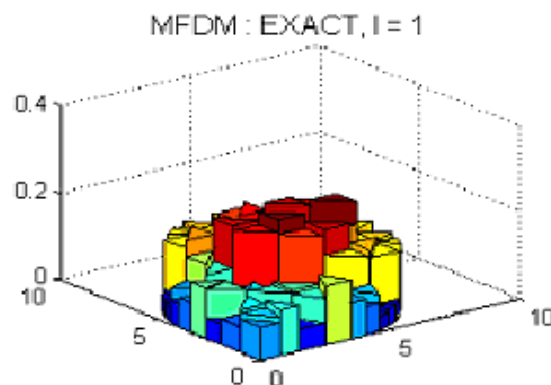


$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= f(x, y) & \text{w } \Omega \\ u &= \bar{u} & \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$



Kombinacje metod (MES + BMRS) - przykład

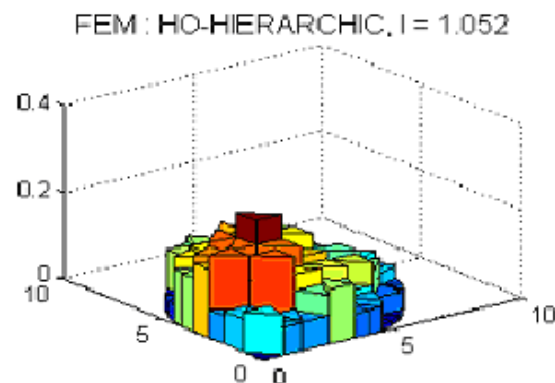
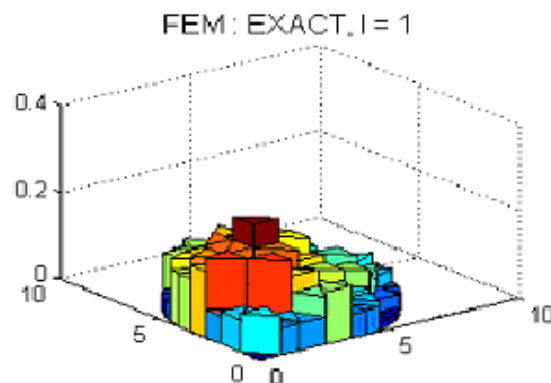
Błąd rozwiązania
BMRS



Oszacowanie
rozwiązania **BMRS**
za pomocą estymatora
BMRS

$$i = \left| \frac{\eta - \bar{e}}{\bar{e}} \right|$$

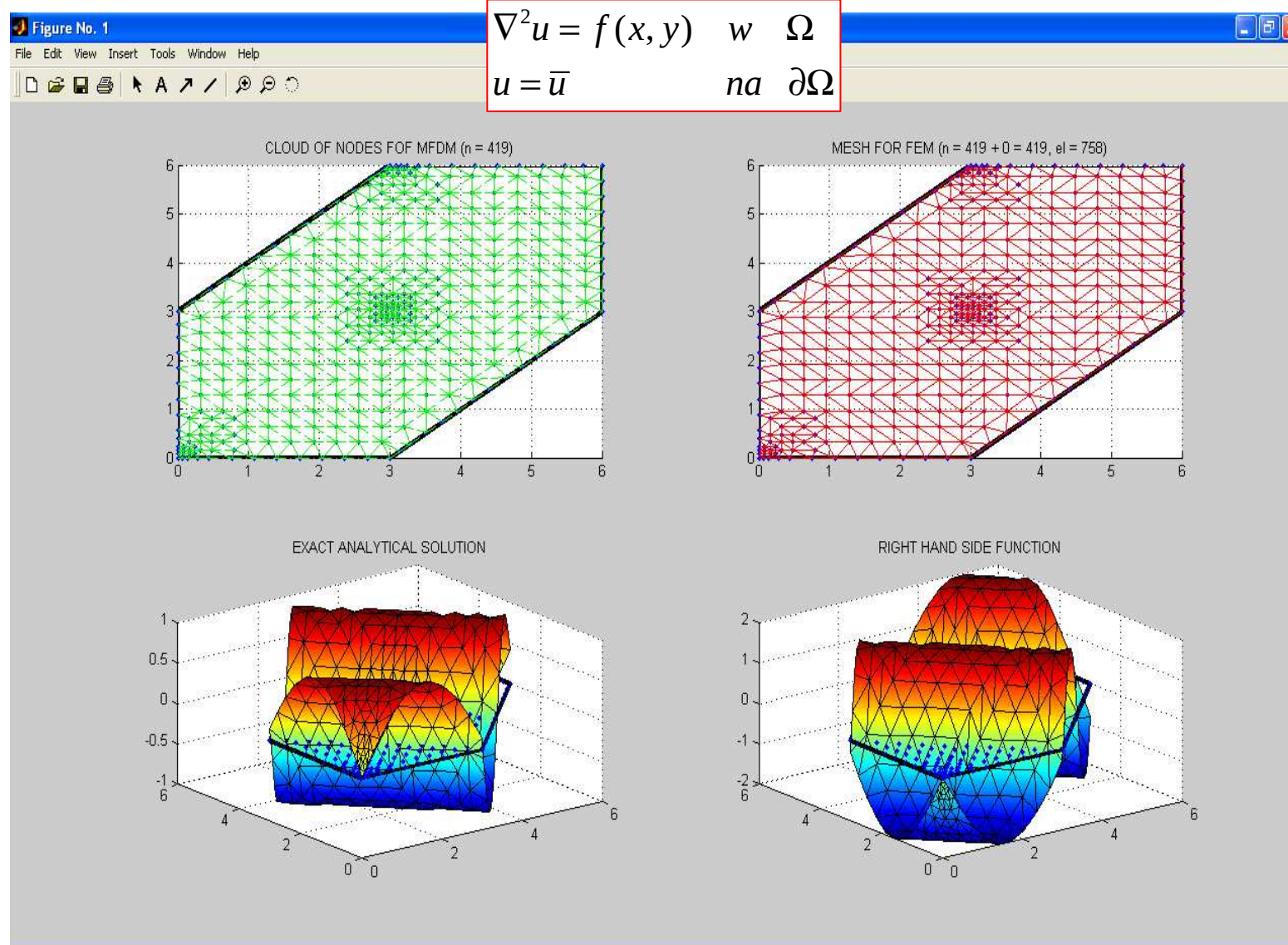
Błąd rozwiązania
MES



Oszacowanie
rozwiązania **MES**
za pomocą estymatora
BMRS

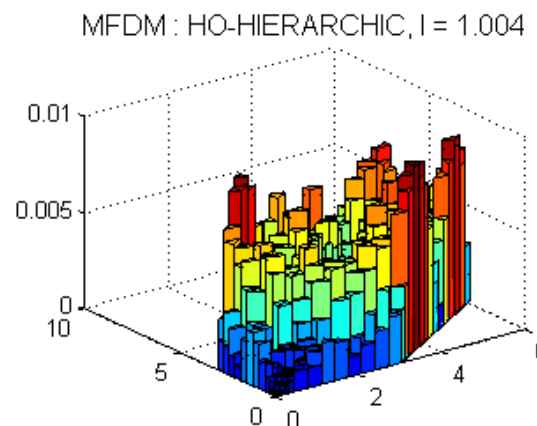
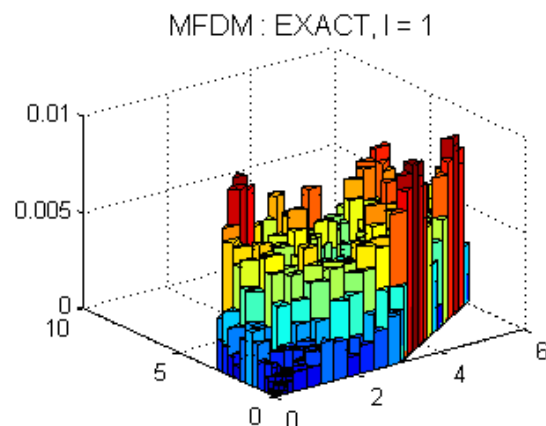
S.Milewski, J.Orkisz, „Improvements in the global a-posteriori error estimation of the FEM and MFDM solutions”,
KUKDM AGH Cyfronet 2010, 18-19 marzec, 2010, Zakopane, Polska

Kombinacje metod (MES + BMRS) - przykład



Kombinacje metod (MES + BMRS) - przykład

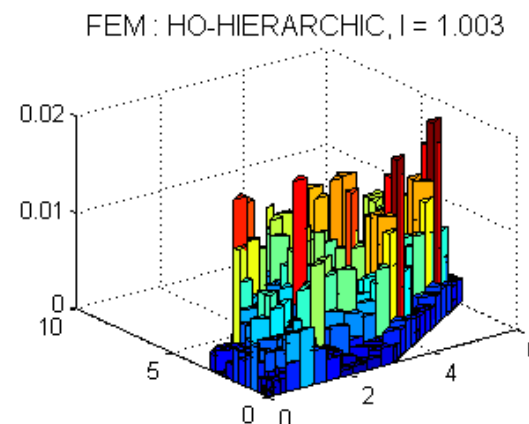
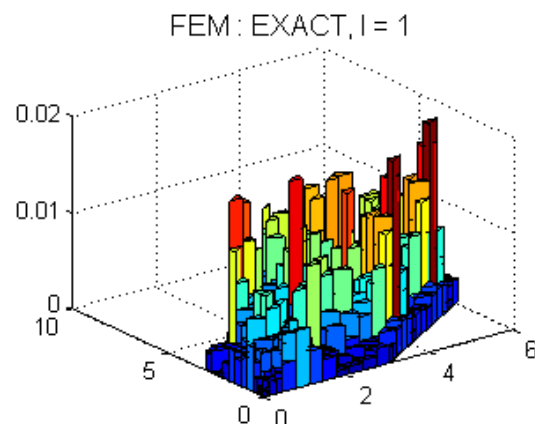
Błąd rozwiązania
BMRS



Oszacowanie
rozwiązania **BMRS**
za pomocą estymatora
BMRS

$$i = \left| \frac{\eta - \bar{e}}{\bar{e}} \right|$$

Błąd rozwiązania
MES



Oszacowanie
rozwiązania **MES**
za pomocą estymatora
BMRS

S.Milewski, J.Orkisz, „Improvements in the global *a-posteriori* error estimation of the FEM and MFDM solutions”,
KUKDM AGH Cyfronet 2010, 18-19 marzec, 2010, Zakopane, Polska

Podsumowanie

Metody bezsiatkowe, w tym **BMRS**, są **intensywnie rozwijane** na całym świecie

Udział uczonych:

USA	I. Babuska, Melenk JT.Oden, A.Duarte, T.Liszka, W.Tworzydło T.Belytshko, W.K. Liu, S.Shen, J.S.Chen J.K.Bathe, S.De, S.Atluri
EU	O.C.Zienkiewicz E.Onate, S.Idelsohn A.Huerta, M.Griebel, M.Schweitzer, P.Bouillard, J.V.Sladek, P.Villon
AZJA	G.R.Liu , H. Noguchi
PL	Z.Kączkowski, R.Tribiło, J.Cendrowicz , J.Kitowski, Cracow Group: J.Orkisz, T.Liszka, W.Tworzydło, J.Krok, W.Karmowski, M.Pazdanowski, J.Magiera, S.Milewski, I.Jaworska

Konferencje, seminaria, sympozja: WCCM, CMM, ICCES, US Congress, ECCM

Publikacje, opracowania, monografie:

- T.P. Fries, H.G. Matthies „Classification and Overview of Meshfree Methods” , Technische Universitat Braunschweig, 2004
- S.N. Atluri, S.Shen „The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method”, Tech Science Press, 2002
- S. Li, WK Liu, „Meshfree Particle Methods”, Springer, 2004
- S.N. Atluri „The Meshless Method (MLPG) for Domain & Bie Discretizations”, Tech Science Press, 2004
- T.P. Fries, H.G. Matthies „Classification and Overview of Meshfree Methods”,Techn. Univ. Branschweig, 2004
- M. Griebel, M.A.Schweitzer „Meshfree Methods for Partial Differential Equations”, Springer, 2002 - 2008
- V.M.A. Leitaó, C.J.S. Alves, C.A. Duarte „Advances in Meshless Techniques”, Springer, 2007
- Orkisz J., „Finite Difference Method”, part III in Handbook of Computational Mechanics, ed: Kleiber, Springer, 1998