

Sławomir Milewski

Kraków, dn. 2004-10-21

Mechanika Komputerowa V rok

Wydział Inżynierii Lądowej

Politechnika Krakowska

PRACA DYPLOMOWA

„METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH WYŻSZEGO RZĘDU I JEJ ZASTOSOWANIA W JEDNOWYMIAROWYCH PROBLEMACH BRZEGOWYCH MECHANIKI”

autor : Sławomir Milewski

promotor : prof. dr hab. inż. Janusz Orkisz

METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH WYŻSZEGO RZĘDU I JEJ ZASTOSOWANIA W JEDNOWYMIAROWYCH PROBLEMACH BRZEGOWYCH MECHANIKI

WSTĘP

Przedmiotem pracy jest *Metoda Różnic Skończonych MRS* [1], należąca do szerokiej klasy metod bezsiatkowych – jednych z podstawowych metod dyskretnych służących do dyskretnej analizy problemów brzegowych. Podstawą *MRS* jest zamiana operatorów różniczkowych występujących w obszarze i na jego brzegu na operatory różnicowe, pozwalające na zapisanie funkcji niewiadomej oraz jej pochodnych za pomocą jej wartości węzłowych (w najprostszej wersji tej metody). Jej klasyczna wersja bazowała jedynie na siatkach o regularnych odstępach między węzłami. Obecnie mówi się o *Bezsiatkowej Metodzie Różnic Skończonych BMRS* [1], [6], w której lokalna aproksymacja nie bazuje na żadnej danej z góry regularnej konfiguracji węzłów lub też wynikającej z podziału na elementy. Oznacza to, iż węzły w dowolnej liczbie mogą być rozmieszczone zupełnie dowolnie w obszarze oraz na jego brzegu. Pozwoliło to znacznie rozszerzyć pole zastosowań dla *MRS*.

Wzory różnicowe, najczęściej generowane metodą aproksymacji *MWLS* (*Moving Weighted Least Squares*) pozwalają na zapisanie równań różnicowych w postaci układu równań algebraicznych. Jego rozwiązanie daje wynik numeryczny, obarczony błędem, zazwyczaj powstałym m.in. przez użycie operatora różnicowego niskiej klasy. Wśród sposobów jego zmniejszenia wyróżnione są podejścia adaptacyjne modyfikujące wyjściową dyskretyzację problemu brzegowego tam gdzie błąd rozwiązania jest największy. Najbardziej popularne z nich są podejścia adaptacyjne typu h (zwiększenie liczby węzłów, [1]) oraz p (podniesienie rzędu lokalnej aproksymacji). Te ostatnie, zwane podejściami wyższego rzędu, są punktem wyjścia dla dalszych rozważań w niniejszej pracy.

Obecny stan rozwoju technik wyższego rzędu w klasycznej *MRS* wskazuje na dwie metody związane z podniesieniem rzędu aproksymacji przy generacji wzorów różnicowych : podejście *defect (deferred) correction* (użycie operatora różnicowego wyższego rzędu) opisane w pracy [4] oraz podejście *multipoint* (podniesienie rzędu aproksymacji operatora różnicowego w węźle centralnym poprzez wykorzystanie odpowiedniej kombinacji i wartości

prawych stron równania obliczanych w pozostałych węzłach gwiazdy różnicowej) opisane w [5]. Jednak oba podejścia nie są pozbawione wad, co niestety zawęża pole ich wykorzystania. Celem obecnego opracowania jest rozwijanie zupełnie nowego podejścia wyższego rzędu zaproponowanego po raz pierwszy w pracy [2]. Zwiększenie rzędu aproksymacji dla operatora różnicowego odbywać się będzie nie poprzez dokładanie nowych węzłów lecz poprzez uwzględnienie członów wyższego rzędu w taki sposób aby jakość aproksymacji była stała i niezależna od użytego operatora różnicowego. W dalszej perspektywie należy wskazać także możliwość ([2]) wprowadzenia nowego ulepszonego podejścia *multipoint*. Tak zdefiniowane podejście wyższego rzędu należy również uogólnić na sytuacje, w których występują skoki w niewiadomej funkcji lub w jej pochodnych oraz na różnego rodzaju postaciach warunków brzegowych. Dzięki temu uwzględnienie jak największej liczby czynników pozwoli na przybliżenie się do rozwiązania ścisłego analitycznego danego problemu brzegowego oraz da możliwość pełnej automatyzacji podejścia.

Należy zatem brać pod uwagę przyszłą implementację komputerową owych algorytmów. W tym celu potrzebne jest rozszerzenie proponowanego podejścia wyższego rzędu z klasycznej *MRS* na jej bezsiatkową, w pełni zautomatyzowaną wersję *BMRs*.

W obecnej pracy rozważania teoretyczne są weryfikowane analizą jednowymiarowych problemów brzegowych, a zwłaszcza obliczaniem ugięć belek. Prostota sformułowania owych problemów pozwala na przetestowanie przedstawionych w pracy algorytmów wraz ze stopniowym zwiększaniem poziomu trudności, począwszy od liniowej statyki belki zginanej aż do analizy wyboczenia słupa *Eulera*. Wszystkie przytoczone w kolejnych rozdziałach przykłady miały na celu pokazanie efektywności proponowanego podejścia wraz z sygnalizacją miejsc, gdzie powstają typowe dla niego trudności.

Dalszym krokiem będzie przeniesienie rozważań do dziedziny zadań brzegowych dwuwymiarowych, na początek próba sformułowania podejścia wraz z przedstawieniem prostego przykładu. Należy również wspomnieć o możliwości wykorzystania proponowanego podejścia wyższego rzędu do analizy błędów *a posteriori* w *BMRs*. Dzięki temu można będzie połączyć podejście z istniejącymi technikami adaptacyjnymi, głównie z adaptacją typu *h*.

ZAKRES PRACY – PROBLEMATYKA POSZCZEGÓLNYCH ROZDZIAŁÓW

1. TECHNIKI ULEPSZENIA ROZWIĄZANIA RÓŻNICOWEGO

- przykład wprowadzający
- kierunki analizy

2. TECHNIKA *DEFECT (DEFERRED) CORRECTION*

- sformułowanie
- przykłady
- podsumowanie

3. TECHNIKA WYŻSZEGO RZĘDU DLA ROZWIĄZAŃ GŁADKICH

- wprowadzenie – idea podejścia
- sformułowanie ID dla belek
- przykłady dla belek
- podsumowanie
 - zalety
 - wady
 - wnioski – wprowadzenie skoków

4. TECHNIKA WYŻSZEGO RZĘDU Z UWZGLĘDNIONYMI SKOKAMI FUNKCJI I JEJ POCHODNYCH

- typowe sytuacje skoków w mechanice budowli
- sformułowanie ID dla belek
- przykłady dla belek
- zastosowanie podejścia do dyskretyzacji warunków brzegowych (belki)
- przykłady dla belek

5. DYSKRETYZACJA WARUNKÓW BRZEGOWYCH

- wprowadzenie
 - charakterystyka problemu
 - możliwe drogi rozwiązania
 - przykłady wprowadzające

- sformułowanie
 - rozwiązanie $1D$
 - rozwiązanie $2D$
- przykłady dla belek

6. TECHNIKA WYŻSZEGO RZĘDU DLA STATYKI BELEK SPRĘŻYSTYCH

- ogólne sformułowanie (podejście *Clebsha*)
- przykłady
 - belka przegubowa
 - belka statycznie niewyznaczalna
 - wyboczenie słupa *Eulera*

7. PODEJŚCIE *MULTIPOINT*

- wprowadzenie
 - idea podejścia
 - prosty przykład
 - podsumowanie (wady, zalety, wnioski)
- nowe podejście *multipoint*
 - idea podejścia
 - prosty przykład
 - sformułowanie
- przykłady dla belek

8. APROKSYMACJA WYŻSZEGO RZĘDU W WERSJI BEZSIATKOWEJ *MRS*

- wprowadzenie
 - ogólna *BMRS*
 - *BMRS* w $1D$
 - prosty przykład dla belek
- rozwiązanie dla belek

9. ROZWIĘCIĘCIE $2D$ PODEJŚCIA WYŻSZEGO RZĘDU

- wprowadzenie
- sformułowanie *BMRS* wyższego rzędu dla problemów brzegowych $2D$

- dyskretyzacja różnicowa wewnątrz obszaru
- dyskretyzacja różnicowa na brzegu

10.KOŃCOWE UWAGI

- podsumowanie powyższej całości
- kierunki dalszej analizy

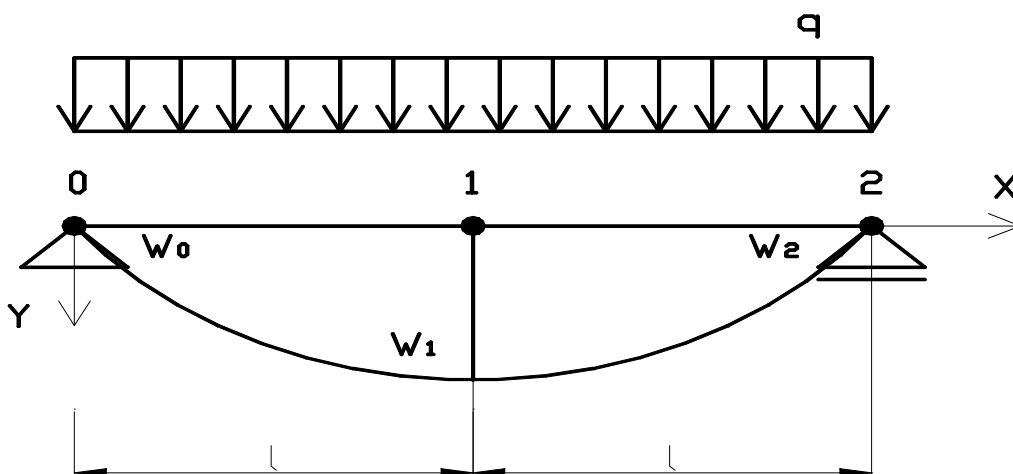
11.LITERATURA

ROZDZIAŁ 1 : TECHNIKI ULEPSZENIA ROZWIĄZANIA RÓŻNICOWEGO

Niech punktem wyjścia do dalszych rozważań będzie odwieczny problem : zadanie brzegowe jednowymiarowe rozwiązano *Metodą Różnic Skończonych* [1] i uzyskano rozwiązanie różnicowe otrzymane po zastosowaniu możliwie prostego operatora różnicowego. Porównano je ze znanym wynikiem analitycznym i okazało się, iż względna różnica między nimi jest spora. Powstaje pytanie : czy w ramach tego samego zadania (tj. tej samej dyskretyzacji) jesteśmy w stanie rozwiązanie to poprawić?

Zanim zostanie udzielona odpowiedź, cały tok postępowania w podejściu różnicowym zostanie zaprezentowany na prostym przykładzie belki swobodnie podpartej obciążonej obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym.

Przykład 1.1



Do opisu matematycznego problemu zginania belki użyto sformułowania lokalnego w postaci równania różniczkowego ugięcia belki. Takie sformułowanie jest najbardziej przejrzyste w tego typu zadaniach, ale oczywiście alternatywne rozważania można by prowadzić przy użyciu jednego ze sformułowań globalnych.

$$\mathcal{L}(x) = \frac{d^2}{dx^2} w(x) = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad 0 \leq x \leq 2l$$

$$M(x) = \frac{1}{2} qx(2l - x) \quad w(0) = 0 \quad w(2l) = 0$$

Ścisłe rozwiązanie analityczne belki przedstawia wielomian rzędu 4-tego :

$$\tilde{w}(x) = \frac{1}{2} \frac{q}{EJ} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{1}{3} lx^3 + \frac{2}{3} l^3 x \right)$$

Do obszaru wprowadzono 3 węzły o rozstawie $h = l$, zdyskretyzowano warunki brzegowe (zerowe ugięcia na podporach) oraz operator różniczkowy drugiego rzędu w obszarze.

$$w_0 = 0 \quad w_2 = 0 \quad Lw_1 = \frac{1}{l^2} (w_0 - 2w_1 + w_2)$$

Rozwiązanie klasyczne otrzymamy przez postawienie operatora różnicowego w węźle (1) :

$$Lw_1 = f_1 \quad \frac{1}{l^2} (w_0 - 2w_1 + w_2) = -\frac{1}{2} \frac{ql^2}{EJ} \rightarrow \mathbf{w}_1^{(L)} = \frac{\mathbf{1} \, ql^4}{\mathbf{4} \, EJ}$$

Indeks „L” przy otrzymanym wyniku oznacza wynik przy użyciu operatora różnicowego „niskiego rzędu”, tj. najprostszego z możliwych. Obliczono też błąd względny rozwiązania w stosunku do rozwiązania ścisłego oznaczonego „wężykiem”.

$$\tilde{w}_1 = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EJ} \quad \varepsilon = \left| \frac{w - \tilde{w}}{\tilde{w}} \right| \times 100\% = 20\%$$

Poziom błąd, 20%, jest relatywnie duży i stanowi zachętę do poszukiwań technik poprawienia tego rozwiązania.

Można przedsięwziąć następujące środki zaradcze :

- w ramach metody *MRS* klasycznej (przy równym rozstawie węzłów) można spróbować zagęścić siatkę – jest to sposób najbardziej oczywisty ale najbardziej prymitywny (wzrasta koszt obliczeń, a jakość wyniku jest wciąż taka sama). Warto nadmienić, że przy $n = 49$ węzłach otrzymano dla powyższego zadania ugięcie w środku, którego błąd względny obliczony tak jak powyżej wynosi 0.035%;
- można świadomie zrezygnować z wymogu regularności siatki i spróbować wykorzystać podejście adaptacyjne, tj. budować kolejne siatki po przeprowadzeniu analizy błędów residualnych. Tu pomocną może być technika *multigrid*, gdzie ściśle

rozwiązuje się układ równań różnicowych na siatce najrzadszej, natomiast błąd rozwiązania koryguje się na siatce najgęstszej;

- pierwszym pomysłem na technikę wyższego rzędu jest podejście typu *defect correction*, zakładające użycie operatora różnicowego wyższego rzędu;
- innym rozwiązaniem może być technika *multipoint*, u której podstaw leży rozbudowa prawej strony równania różnicowego do kombinacji liniowej wartości prawej strony równania różniczkowego i podniesienie w ten sposób rzędu aproksymacji bez zwiększania liczby węzłów gwiazdy operatora różnicowego;
- ostatnim, najlepszym rozwiązaniem jest technika aproksymacji wyższego rzędu, gdzie innowacją jest **korekta prawej strony równania różnicowego** przez dodanie członów zawierających wyrazy wyższego rzędu przy **tym samym** (tj. „niskiego rzędu”) **operatorze różnicowym**.

ROZDZIAŁ 2 : **TECHNIKA DEFECT (DEFERRED CORRECTION)**

Technika zwana *defect correction* lub *deferred correction*, zaprezentowana w [4] jest najbardziej oczywistym sposobem polepszenia jakości wyniku różnicowego przy utrzymaniu tej samej liczby węzłów w siatce. Skoro operator różnicowy najprostszy (tj. „niskiego rzędu”) dał rozwiązanie obciążone stosunkowo dużym błędem to można oczekiwać, że błąd zmniejszy się po zastosowaniu operatora różnicowego rzędu wyższego tj. zbudowanego na większej liczbie węzłów (bądź też większej liczbie stopni swobody w węzłach). Operator różnicowy może być bardziej dokładny jeżeli zostanie wygenerowany techniką *MWLS* (*Moving Weighted Least Squares*). Wtedy przy nadmiarze liczby węzłów w stosunku do liczby stopni swobody lokalnej aproksymacji traci się własności interpolacyjne, ale błąd obciążenia jest wówczas „równiej” rozłożony na współczynniki stojące przy wyrazach wyższego rzędu.

Zadanie realizowane techniką *defect (deferred) correction* można podzielić na dwa etapy :

- **Etap I** : zastosowanie operatora różnicowego niskiego rzędu, otrzymanie odpowiadającego mu rozwiązania niskiego rzędu, ewentualne obliczenie poziomu błędu,

- Etap II : zastosowanie operatora różnicowego wyższego rzędu, otrzymanie odpowiadającego mu rozwiązania wyższego rzędu, porównanie z rozwiązaniem z etapu I.

Od razu widoczną wadą podejścia jest fakt, iż trzeba rozwiązywać nowy układ równań różnicowych, natomiast warto nadmienić, iż przy zastosowaniu iteracyjnej metody rozwiązywania układu równań różnicowych (II etap) optymalnie szybką zbieżność do rozwiązania wyższego rzędu można otrzymać poprzez użycie rozwiązania niskiego rzędu (z pierwszego etapu) jako wektora startowego do pierwszej iteracji.

Tak więc jedynie jako punkt wyjścia do innych, lepszych technik wyższego rzędu pokazane zostanie rozwiązanie wyższego rzędu otrzymane w wyniku podejścia *defect correction*, najstarszego chronologicznie, na tej samej belce przy tej samej wstępnej dyskretyzacji co w przykładzie 1.1.

Przykład 2.1

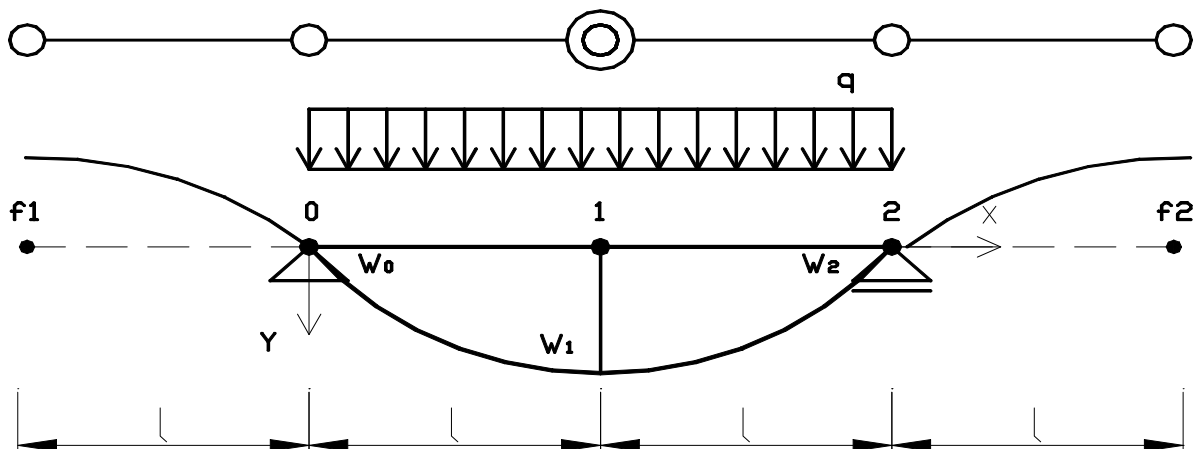
Przy dyskretyzacji startujemy od tego samego operatora, co poprzednio : w pierwszym etapie

otrzymuje się dobrze znane już rozwiązanie klasyczne – „niskiego rzędu” : $w_1^{(L)} = \frac{1}{4} \frac{ql^4}{EJ}$.

Stosowny operator wyższego rzędu, ścisły dla wielomianu $2n = 2 \times 2 = 4$, zbudowany interpolacyjnie na 5 węzłach :

$$L^{(H)} w_i = \frac{1}{12h^2} (-w_{i-2} + 16w_{i-1} - 30w_i + 16w_{i+1} - w_{i+2})$$

wymaga wprowadzenia dodatkowych fikcyjnych węzłów (*f1*) i (*f2*) poza belką, aby możliwa była kolokacja w węźle środkowym belki.



Ich fikcyjne ugięcia można określić ze statycznych warunków brzegowych czyli z faktu zerowania się momentów zginających (drugich pochodnych ugięć) na podporach :

$$w_0'' = 0 \rightarrow w_0'' \approx \frac{w_f - 2w_0 + w_1}{l^2} = 0 \rightarrow w_f = -w_1 \quad \text{dla } f = f_1, f_2$$

Przy swobodnym podparciu belki ugięcia w węzłach fikcyjnych wydają się więc być antysymetryczne w stosunku do ich rzeczywistych odpowiedników.

Po zastosowaniu kolokacji otrzymuje się następujące równanie różnicowe oraz wynik :

$$L_1^{(H)} w_1 = f_1 \rightarrow \mathbf{w}_1^{(H)} = \frac{3}{14} \frac{ql^4}{EJ}$$

Nie otrzymano jednak rozwiązania ścisłego. Błąd względny wynosi tym razem 2.86% i jest znacznie mniejszy niż przy wyniku klasycznym, ale nie jest to rozwiązanie najlepsze. Dlaczego? Wielomian opisujący ugięcie belki jest stopnia 4-tego, tak jak i drugi operator różnicowy $L^{(H)}$. Powinien więc on dać wynik ścisły. I dałby, gdyby nie dyskretyzacja statycznych warunków brzegowych – jest ona niskiego rzędu, gdyż została przeprowadzona za pomocą trypunktowego operatora różnicowego na drugą pochodną – tego samego co w metodzie klasycznej *MRS*. Poprawka, wynikająca z istnienia niepełnej antysymetrii między węzłami (f) i (l) nie została uwzględniona poprzez odrzucenie wyrazów wyższego rzędu. Na obecnym etapie nie da się tego skorygować, także do tego przykładu będzie jeszcze nawiązanie w dalszym ciągu obecnej pracy.

Po przeprowadzeniu powyższej dyskusji można sformułować kilka zarzutów w stosunku do *defect correction*, które będą pretekstem do szukania innych technik wyższego rzędu polepszenia wyniku.

Wady podejścia typu *defect correction* :

- Rozwiązywanie układów równań z dwiema całkowicie innymi lewymi stronami (różne macierze współczynników), przez zastosowanie dwóch różnych operatorów różnicowych : niskiego i wyższego rzędu;
- Potrzeba wprowadzenia dodatkowych węzłów fikcyjnych przy brzegu, a więc nowych niewiadomych do układu równań, co czasami nie jest korzystne, np. przy zadaniach dynamiki lub stateczności konstrukcji;
- Ostateczne rozwiązanie zależy silnie od jakości użytego operatora różnicowego.

Wszystkie te niedogodności znikają przy zastosowaniu proponowanej w tym opracowaniu metody aproksymacji wyższego rzędu (ang. *higher order approximation*).

ROZDZIAŁ 3 : **TECHNIKA WYŻSZEGO RZĘDU DLA ROZWIĄZAŃ GŁADKICH**

U podstaw proponowanego tu podejścia wyższego rzędu [2], [3] leży otrzymywanie wyniku, który zależy tylko od przyjętego rzędu aproksymacji, natomiast całkowicie nie zależy od jakości zastosowanego operatora różnicowego. Poprawka operatora skumulowana jest w członie korekcyjnym, dodawanym do prawej strony równań różnicowych. Nie ma więc potrzeby rozwiązywania dwóch zupełnie różnych układów równań. Będą się one różnić między sobą jedynie postacią prawej strony. Korekta operatora ma zapewnić odpowiedni rząd aproksymacji rozwiązania, wyższy niż ten, który wynikałby z zastosowania operatora różnicowego bez żadnych poprawek czyli niskiego rzędu. Załóżmy, iż operator różnicowy jest rzędu n , wtedy będzie się wymagać w drugim etapie zadania ścisłości dla rzędu aproksymacji $2n$, zarówno dla brzegu jak i wnętrza obszaru (należy pamiętać, iż na brzegu i wewnątrz obszaru mogą być określone zupełnie inne operatory różniczkowe tj. innego rzędu lub innej postaci). Wszystkie brakujące wyrazy rzędu wyższego, które razem z operatorem różnicowym rzędu n dawałyby ścisłość dla aproksymacji rzędu $2n$ znajduje się rozwijając dany operator w szereg *Taylora* (a ściślej rzecz biorąc rozwijając wartości funkcyjne, na których zbudowany jest operator) i zbierając je do wyrażenia zwanego członem korekcyjnym Δ (ang. *correction term*).

Podstawowym problemem będzie teraz obliczenie wartości członu korekcyjnego. Przyjęte zostanie na wstępie założenie, iż funkcja niewiadoma ma ciągłość stopnia co najmniej $2n$, tzn. funkcja i jej wszystkie pochodne do rzędu $2n$ włącznie są funkcjami ciągłymi (wielomianami) bez żadnych skoków. O takim rozwiązaniu mówi się, że jest gładkie. Na takiej postaci funkcji niewiadomej skupimy się w tym rozdziale. Dzięki temu człon korekcyjny będzie składał się wyłącznie z wartości pochodnych wyższego rzędu (tj. od $n+1$ do $2n$) funkcji w węzłach. Ich obliczenie sprowadza się w ogólnym przypadku do ich złożenia (kompozycji) z wartości operatorów rzędu niższego czyli z tych, które są już określone w pierwszym etapie zadania. Gdy już wartość członu korekcyjnego jest znana, należy go dodać do strony prawej równania różnicowego i stworzony w ten sposób układ równań będzie miał zmodyfikowaną prawą stronę w porównaniu do poprzednio

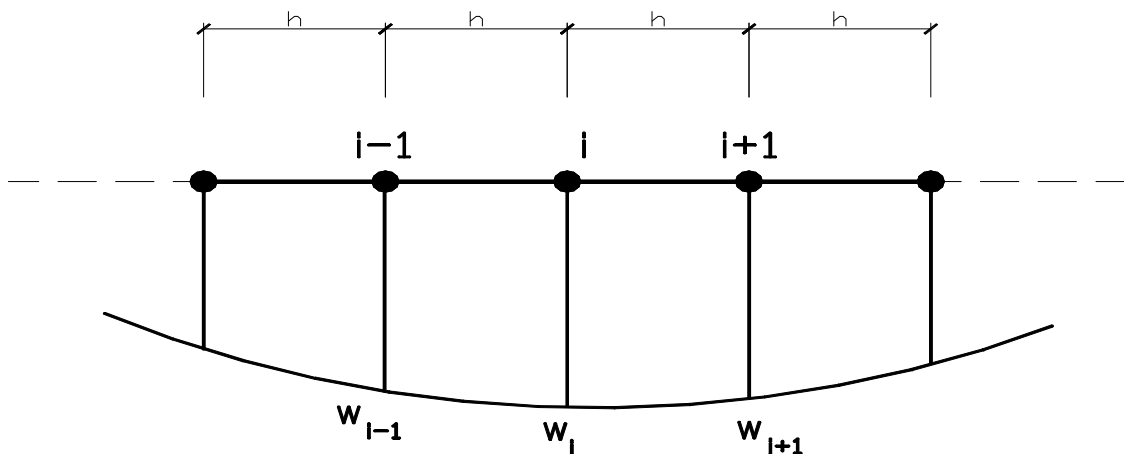
rozwiązywanego. Jeżeli wartość członu korekcyjnego jest ścisła (w ramach rzędu $2n$), to rozwiązanie tego układu też będzie ścisłe w ramach założonego rzędu aproksymacji $2n$.

Przedstawiona poniżej procedura obowiązuje dla problemu zginania belek sprężystych. Konsekwencją jest przyjęcie operatora różnicowego na drugą pochodną ugięcia trójwęzłowego wewnątrz zarówno dla węzłów z wnętrza obszaru jak i węzłów brzegowych.

ALGORYTM TECHNIKI MRS WYŻSZEGO RZĘDU DLA ROZWIĄZAŃ GŁADKICH W PROBLEMIE ZGINANIA BELEK

Dany jest obszar jednowymiarowy o długości L zdysketyzowany za pomocą n węzłów o rozstawie h . Rozpatruje się dowolną konfigurację trzech węzłów wewnątrz obszaru jak na rys :

sformułowanie lokalne problemu brzegowego (dla belek!)



$$\frac{d^2}{dx^2} w(x) = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad 0 \leq x \leq L \quad w(0) = 0 \quad w(L) = 0$$

Dyskretyzacja różnicowa :

$$Lw_i = \frac{1}{h^2} (w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) \quad w_0 = 0 \quad w_n = 0$$

Rozwinięcie wartości węzłowych $(i-1)$, (i) oraz $(i+1)$ operatora różnicowego w szereg *Taylora* :

$$Lw_i \sim \begin{cases} w_{i-1} = w_i - h w_i' + \frac{1}{2} h^2 w_i'' - \frac{1}{6} h^3 w_i''' + \frac{1}{24} h^4 w_i^{IV} + R_{i-1} \\ w_i = w_i \\ w_{i+1} = w_i + h w_i' + \frac{1}{2} h^2 w_i'' + \frac{1}{6} h^3 w_i''' + \frac{1}{24} h^4 w_i^{IV} + R_{i+1} \end{cases}$$

oraz zbilansowanie, uwzględniające mnożniki liczbowe przy poszczególnych wyrazach rozwinięcia daje wyrażenie na operator różnicowy :

$$Lw_u = \frac{1}{h^2} (h^2 w_i'' + \frac{1}{12} h^4 w_i^{IV} + R) = w_i'' + \frac{1}{12} h^2 w_i^{IV} + R = f_i + \Delta_i + R_i$$

f_i – prawa strona równania

Δ_i – człon korekcyjny (rozważany)

R_i – błąd obcięcia wyrazów szeregu (pomijany)

Etap I : operator niskiego rzędu : rozwiązanie klasyczne ($\Delta_i = 0$)

$$Lw_i = f_i \quad \text{dla } i = 1, \dots, n \rightarrow w_i^{(L)}$$

Etap II : ten sam operator + człon korekcyjny ($\Delta_i \neq 0$) : rozwiązanie wyższego rzędu

$$Lw_i = f_i + \Delta_i \quad \text{dla } i = 1, \dots, n \rightarrow w_i^{(H)}$$

Jak obliczyć wartość członu korekcyjnego? Wiadomo już, iż będzie zależał on od pochodnych wyższego rzędu III i IV. Najprostszą i najbardziej ogólną metodą (ogólną – tzn. dla dowolnego operatora różnicowego) jest kompozycja pochodnych wyższego rzędu (III, IV) w obszarze z pochodnych niskiego rzędu (sama funkcja, I, II) a następnie wykorzystanie znanych już wartości tych pochodnych gdyż były one układane w pierwszym etapie zadania. Sprawa nieco komplikuje się przy obliczaniu pochodnych na brzegu. Czasem ich wartość jest znana z dodatkowych warunków brzegowych (np. przy podparciu swobodnym z faktu zerowania się momentu zginającego czyli drugiej pochodnej ugięcia) . Tak zawsze być nie musi. Przykładowo, jeżeli algorytm natrafiłby na pochodne pierwsze ugięcie na brzegu (w_0', w_2'), to nie dałoby się bezpośrednio podstawić za nie konkretnej wartości. To pierwszy mankament takiego typu podejścia, wymagający budowy ogólnego algorytmu postępowania w celu obliczania wartości pochodnych ugięć na brzegu obszaru.

Na razie przyjęte zostanie założenie, że wartości pochodnych na brzegu wynikają bezpośrednio z warunków brzegowych. Sposoby obliczania wartości członu korekcyjnego wewnątrz obszaru są więc następujące:

- Sposób 1 : najbardziej ogólny : kompozycja operatorów niższego rzędu o znanych wartościach (etap I);

- Sposób 2 : wykorzystanie bezpośrednio równania różniczkowego lub po jego zróżniczkowaniu – dla prostych problemów brzegowych;
- Sposób 3 : formuła *multipoint* (patrz : rozdział 7).

$$\Delta_i = \frac{1}{12} h^2 w_i^{IV} = \frac{1}{12} h^2 \left(\frac{w_{i-1}'' - 2w_i'' + w_{i+1}''}{h^2} \right) = \frac{1}{12} (w_{i-1}'' - 2w_i'' + w_{i+1}'')$$

- ogólnie : $w_{i-1}'', w_i'', w_{i+1}''$ - znane wartości z I etapu,
- w przypadkach szczególnych : w_i'', w_i''', w_i^{IV} itd - z równania $\mathcal{L}w = f$.

Powyższy algorytm zostanie zaprezentowany na tym samym przykładzie belki, co poprzednio dla lepszej konfrontacji z istniejącymi, znanymi już, podejściami.

Przykład 3.1

Każda metoda wyższego rzędu na ogół wymaga znajomości rozwiązania klasycznego, tu dla operatora niskiego rzędu :

$$L^{(L)} w_i = \frac{1}{h^2} (w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1})$$

$$L_1^{(L)} w_1 = f_1 \rightarrow \mathbf{w}_1^{(L)} = \frac{\mathbf{1} \mathbf{q} l^4}{\mathbf{4} \mathbf{E} \mathbf{J}}$$

Istotą omawianej metody nie jest wprowadzenie innego operatora różnicowego ale korekta tego użytego wcześniej. Odbywa się to poprzez rozwinięcie wszystkich wyrazów funkcyjnych bocznych w operatorze różnicowym $L^{(L)}$ czyli w_0, w_1, w_2 w szereg *Taylora* wokół węzła centralnego operatora (l) :

$$Lw_1 = \frac{1}{l^2} \begin{cases} w_1 - lw_1' + \frac{1}{2} l^2 w_1'' - \frac{1}{6} l^3 w_1''' + \frac{1}{24} l^4 w_1^{IV} + R_0 \\ - 2w_1 \\ w_1 + lw_1' + \frac{1}{2} l^2 w_1'' + \frac{1}{6} l^3 w_1''' + \frac{1}{24} l^4 w_1^{IV} + R_2 \end{cases}$$

Operator różnicowy klasyczny był rzędu $n=2$, uwzględnia się więc wszystkie wyrazy rozwinięcia aż do rzędu $2n = 4$ włącznie. Po zbilansowaniu (czyli dodaniu) wyrazów rozwinięcia (z mnożnikami $1, -2, 1$ występującymi w operatorze klasycznym) otrzymujemy :

$$Lw_1 = \frac{1}{l^2} (l^2 w_1'' + \frac{1}{12} l^4 w_1^{IV}) = w_1'' + \frac{1}{12} l^2 w_1^{IV} + R$$

$Lw_1 = f_1 + \Delta_1 + R$, gdzie :

$$w_1'' = f_1 \quad \text{prawa strona równania}$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{12} l^2 w_1^{IV} \quad \text{człon korekcyjny (uwzględnione dodatkowe człony wyższego rzędu)}$$

$$R \approx 0 \quad \text{pomijany błąd obcięcia wyrazów szeregu}$$

Dla wyrazów do rzędu drugiego włącznie istnieje równość między operatorami : różniczkowym i różnicowym klasycznym.

Podstawowym problemem jest obliczenie wartości członu korekcyjnego. Ogólnym sposobem jest dekompozycja operatora różniczkowego rzędu czwartego :

$$\Delta_1 = \frac{1}{12} l^2 \left(\frac{w_0'' - 2w_1'' + w_2''}{l^2} \right) = \frac{1}{12} (-2w_1'')$$

Drugie pochodne w węzłach (0) i (2) są równe zero (statyczne warunki brzegowe). Pozostaje do obliczenia niezerowa pochodna drugiego rzędu. W tym właśnie miejscu należy posłużyć się gotowymi już operatorami niskiego rzędu (rzęd pierwszy i drugi) z pierwszego etapu obliczeń : w beziatkowej MRS podczas generacji wzorów różnicowych generowane są metodą najmniejszych ważonych kroczących kwadratów MWLS (ang. *Moving Weighted Least Squares*) wszystkie pochodne aż do rzędu $n = 2$ włącznie :

$$w_1'' = Lw_1 = f_1 = -\frac{1}{2} \frac{ql^2}{EJ} \rightarrow \Delta_1 = \frac{1}{12} \frac{ql^2}{EJ}$$

W przypadku prostego równania różniczkowego (właśnie w przypadku statyki belek) drugie pochodne ugięć to prawa strona równania różniczkowego :

$$w_1'' = -\frac{M_1}{EJ} = -\frac{1}{2} \frac{ql^2}{EJ} \rightarrow \Delta_1 = \frac{1}{12} \frac{ql^2}{EJ}$$

Oczywiście bardziej ogólne jest podejście pierwsze, oparte na wykorzystaniu gotowych już wartości wygenerowanych operatorów różnicowych niskiego rzędu.

Znane są też inne techniki obliczania wartości członu korekcyjnego :

- w przypadku prostego równania różniczkowego dopuszczalne jest jego różniczkowanie :

$$w^{IV} = \frac{q(x)}{EJ} \quad w_1^{IV} = \frac{q}{EJ} \rightarrow \Delta_1 = \frac{1}{12} l^2 w_1^{IV} = \frac{1}{12} \frac{ql^2}{EJ}$$

- można też skorzystać ze wspomnianej formuły *multipoint*, ale na tym etapie nie będzie ona rozważana.

Ostateczne równanie różnicowe (czyli w drugim etapie rozwiązywania) będzie wyglądało następująco :

$$Lw_1 = f_1 + \Delta_1, \text{ gdzie :}$$

L - ten sam operator różnicowy

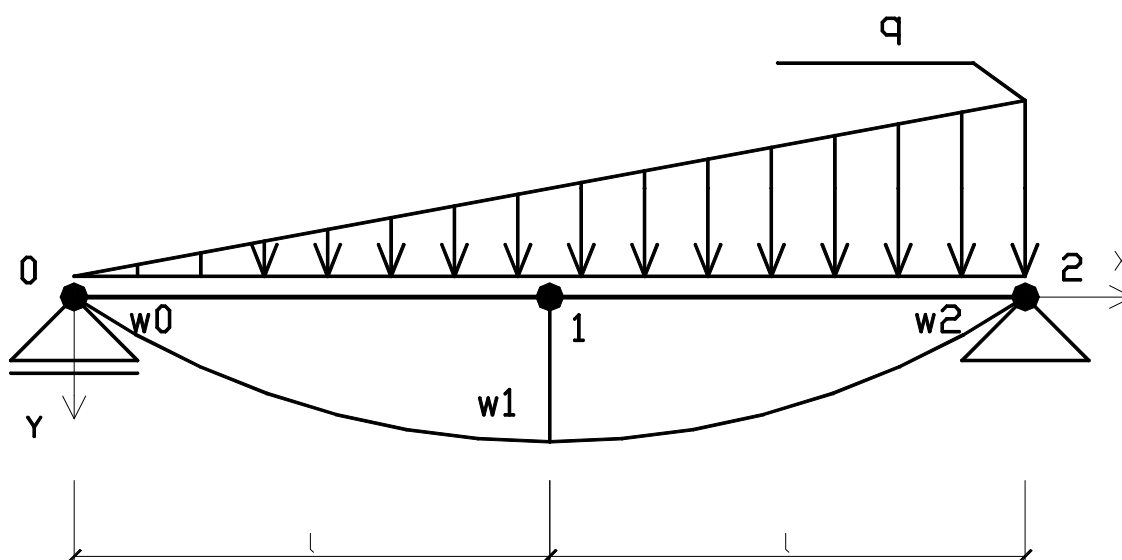
$f_1 + \Delta_1$ - skorygowana prawa strona

$$\frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = -\frac{1}{2} \frac{ql^2}{EJ} + \frac{1}{12} \frac{ql^2}{EJ} \rightarrow w_1^{(H)} = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EJ}$$

Nie ma już żadnych przeszkód ku temu, aby otrzymany wynik uznać za ścisły : ścisły dla założonego rzędu lokalnej aproksymacji ($2n = 4$) oraz ścisły w porównaniu z wynikiem analitycznym (rzęd wielomianu opisującego ugięcie = 4 stąd $R = 0$).

Na zaprezentowanym przykładzie widać bardzo dobrze zarówno wady jak i zalety podejścia *MRS* wyższego rzędu. Zanim jednak dokonany zostanie ich bilans, rozważmy jeszcze jeden przykład : belka swobodnie podparta obciążona obciążeniem liniowo zmiennym. Komentarze zostały ograniczone do niezbędnego minimum.

Przykład 3.2



sformułowanie problemu :

$$\mathcal{L}(x) = \frac{d^2}{dx^2} w(x) = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad 0 \leq x \leq 2l$$

gdzie :

$$M(x) = \frac{1}{12} \frac{qx}{l} (4l^2 - x^2) \quad w(0) = 0 \quad w(2l) = 0$$

rozwiązanie analityczne (ugięcie belki) – wielomian stopnia 5-tego :

$$\tilde{w}(x) = -\frac{1}{12} \frac{q}{EJ} \frac{1}{l} \left(\frac{2}{3} l^2 x^3 - \frac{1}{20} x^5 - \frac{84}{45} l^4 x \right)$$

dyskretyzacja różnicowa warunków brzegowych i operatora różniczkowego :

$$w_0 = 0 \quad w_2 = 0 \quad Lw_1 = \frac{1}{l^2}(w_0 - 2w_1 + w_2)$$

Etap I : rozwiązanie niskiego rzędu :

$$Lw_1 = f_1 \quad \frac{1}{l^2}(w_0 - 2w_1 + w_2) = -\frac{1}{4} \frac{ql^2}{EJ} \rightarrow \mathbf{w}_1^{(L)} = \frac{\mathbf{1} \, ql^4}{\mathbf{8} \, EJ}$$

obliczenie wartości członu korekcyjnego :

$$\Delta_1 = \frac{1}{12} l^2 w_1^{IV} = \frac{1}{12} (-2w_1^{II}) = \frac{1}{24} \frac{ql^2}{EJ}$$

Etap II : rozwiązanie wyższego rzędu :

$$Lw_1 = f_1 + \Delta_1 \quad \frac{1}{l^2}(w_0 - 2w_1 + w_2) = -\frac{1}{4} \frac{ql^2}{EJ} + \frac{\mathbf{1} \, ql^2}{\mathbf{24} \, EJ}$$

$$\frac{1}{l^2}(-2w_1) = -\frac{5}{24} \frac{ql^2}{EJ} \rightarrow \mathbf{w}_1^{(H)} = \frac{\mathbf{5} \, ql^4}{\mathbf{48} \, EJ}$$

Otrzymany wynik, ściśły dla założonego rzędu aproksymacji (rzęd 4-ty) okazuje się również być wynikiem zgodnym z rozwiązaniem analitycznym, mimo iż wielomian opisujący ugięcie jest rzędu 5-tego. Skąd więc zgodność obydwu wyników? Otóż symetria operatora różnicowego powoduje, iż jedyne niezerowe wyrazy reszty szeregu (wartości piątych pochodnych) „znoszą” się nawzajem, tak więc w rezultacie wciąż reszta $R = 0$.

Taka „wymuszona” symetria na operatorze różnicowym pozwala na otrzymywanie wyników zgodnych z analitycznymi dla zadań z obciążeniem liniowo zmiennym na belkach.

$$R = -\frac{1}{120} l^5 w_1^{V} + \frac{1}{120} l^5 w_1^{V} + 0 = 0$$

Analizując powyższe przykłady można dokonać pierwszego bilansu wad i zalet proponowanego podejścia wyższego rzędu.

Do zalet należy zaliczyć :

- Układ równań ma **tę samą lewą stronę** jak w podejściu standardowym (ten sam operator różnicowy), natomiast prawa jest wzbogacona o człon zapewniający ścisłość wyniku dla założonego rzędu aproksymacji,
- Ostateczne rozwiązanie **zależy tylko od błędu obcięcia** wyrazów szeregu Taylora, *nie zależy od precyzji operatora różnicowego*,
- Wymagane są **dwa kroki** dla otrzymania rozwiązania : jeden dla rozwiązania klasycznego, drugi dla rozwiązania wyższego rzędu.

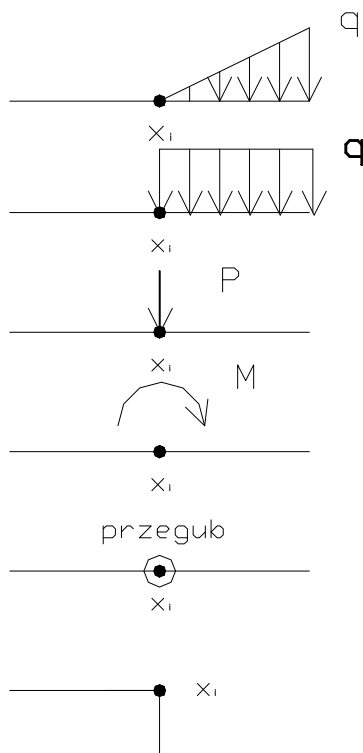
Natomiast problemy mogą powstać przy następujących aspektach :

- dyskretyzacja **warunków brzegowych** : wymagana osobna *aproxymacja wyższego rzędu w węzłach brzegowych*,
- mogą wystąpić różne **stopnie gładkości rozwiązania** : wymagane *uwzględnienie skoków w samej funkcji ugięcia lub/i jej pochodnych*.

Pierwszą rzeczą, którą trzeba się zająć jest sposób uwzględnienia skoków w funkcji niewiadomej oraz jej pochodnych, wywołanych obecnością na belkach m.in. obciążeń skupionych. Wprowadzenie aparatu obliczeniowego uwzględniającego skoki pozwoli osiągnąć pełną zgodność ostatecznego wyniku różnicowego z założonym rzędem approxymacji (wielomianowej) zarówno w obszarze, jak i, dla prostych operatorów różniczkowych, na brzegu obszaru.

ROZDZIAŁ 4 : TECHNIKA WYŻSZEGO RZĘDU Z UWZGLĘDNIONYMI SKOKAMI FUNKCJI I JEJ POCHODNYCH

Ponieważ dalej będziemy zajmować się głównie problemami statyki belek, przedstawimy zbiór najczęstszych sytuacji występowania skoków czyli nieciągłości w kolejnych pochodnych ugięcia belki.



$J^{(5)}$ – skok obciążenia liniowo zmiennego

$J^{(4)}$ – skok obciążenia równomiernie rozłożonego

$J^{(3)}$ – skok siły poprzecznej

$J^{(2)}$ – skok momentu zginającego

$J^{(1)}$ – skok kąta ugięcia belki (przegub)

$J^{(0)}$ – utrata ciągłości belki

Skomentować należy przypadek pierwszy i ostatni. Pierwszy $J^{(5)}$ trudno uznać na klasyczny przypadek nieciągłości funkcji, raczej należy go łączyć z próbą uwzględnienia przyrostu obciążenia liniowo zmiennego od pewnego miejsca na belce, ostatni zaś, $J^{(0)}$, występuje raczej rzadko, np. przy nierównomiernym osiadaniu podpór. Zarówno sam skok, jak i jego wartość w danym węźle na belce, będą dalej oznaczane symbolem :

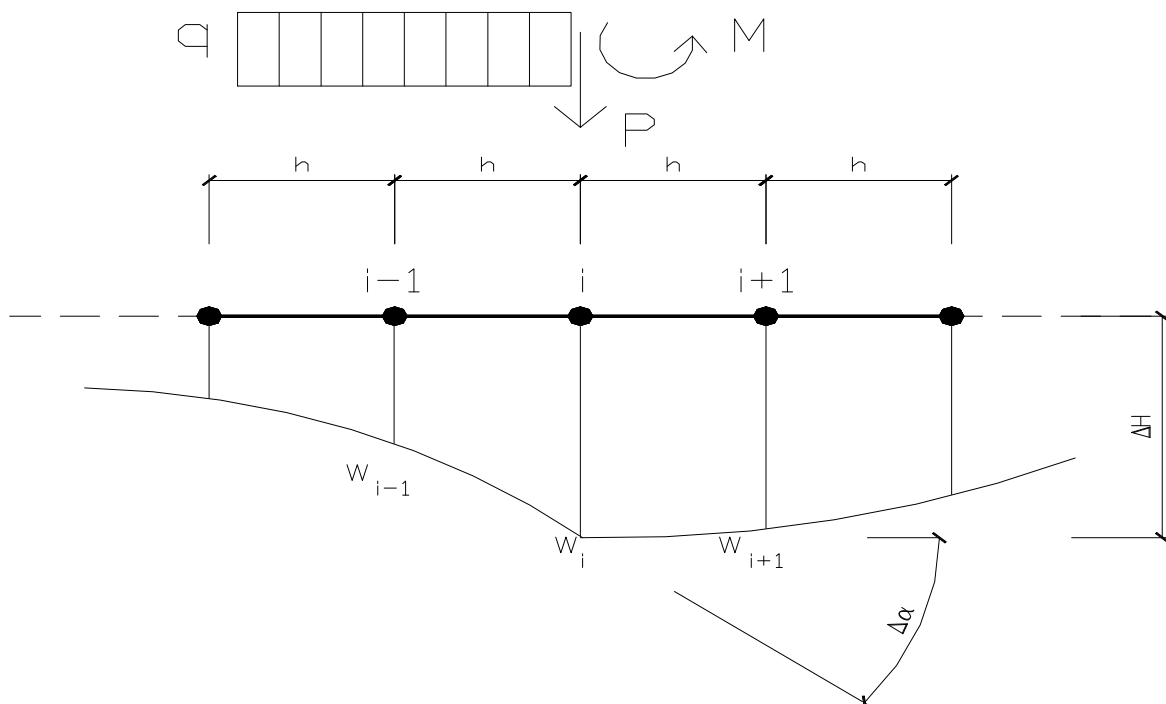
$J^{(k)}$, gdzie : (k) – rząd pochodnej, w której występuje utrata ciągłości.

Sposób na uwzględnienie skoku w pochodnej odpowiedniego rzędu k ($k = 0, 1, \dots, 5$) będzie polegał na opisaniu pochodnej w okolicy węzła x_i , w którym ów skok występuje za pomocą zerojedynkowej funkcji *Heaviside'a* przeskalowanej przez wartość tego skoku. W ten sposób przy rozwijaniu w danym węźle w szereg *Taylora* odpowiednich wartości funkcji występujących w operatorze różnicowym będzie można uwzględnić skończoną różnicę w wartości pochodnej po obu stronach węzła.

Przedstawiony poniżej algorytm dotyczy tak jak poprzednio problemu zginania belek.

ALGORYTM TECHNIKI MRS WYŻSZEGO RZĘDU PRZY RÓŻNYCH STOPNIACH
NIECIĄGŁOŚCI FUNKCJI UGIĘCIA ZGINANEJ BELKI

Rozpatrzmy konfigurację węzłów jak na rys. poniżej. W węźle centralnym (i) mogą wystąpić wszystkie przypadki nieciągłości rozwiązania zaprezentowane na początku rozdziału.



operator różnicowy dla problemu ugięcia belek :

$$Lw_i = \frac{1}{h^2}(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1})$$

zapis k -tej pochodnej rozwiązania z nieciągłością w węźle centralnym operatora :

$$w^{(k)}(x) = w_{lewa}^{(k)}(x) + J^{(k)} H(x - x_i)$$

gdzie :

$$H(x - x_i) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < x_i \\ \frac{1}{2}, & \text{dla } x = x_i \\ 1, & \text{dla } x > x_i \end{cases} \quad \text{funkcja Heaviside'a}$$

rozwińnięcie operatora Lw_i w szereg *Taylora* :

$$Lw_i = \frac{1}{h^2} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^4 (-1)^k \frac{h^k}{k!} w_i^{(k)} + R_{i-1} \\ -2w_i \\ \sum_{k=0}^4 \frac{h^k}{k!} [w_i^{(k)} + J^{(k)}] + R_{i+1} \end{array} \right.$$

po zbilansowaniu :

$$Lw_i = f_i + \Delta_i + R_i$$

gdzie poszczególne składniki można rozpisać następująco :

$$f_i = w_i'' \quad R_i \approx 0$$

$$\Delta_i = \frac{J^{(0)}}{h^2} + \frac{J^{(1)}}{h} + \frac{1}{2} J^{(2)} + \frac{1}{6} h J^{(3)} + \frac{1}{12} h^2 w_i^{IV} + \frac{1}{24} h^2 J^{(4)}$$

$$J^{(0)} = \Delta H \quad \text{znana wartość osiadania podpory}$$

$$J^{(1)} = \Delta \alpha \quad \text{skok kąta ugięcia – dodatkowa niewiadoma}$$

$$J^{(2)} = \frac{M_i}{EJ} \quad \text{skok momentu zginającego – znana wartość}$$

$$J^{(3)} = \frac{Q_i}{EJ} \quad \text{skok siły poprzecznej – znana wartość}$$

$$J^{(4)} = \frac{q_i}{EJ} \quad \text{skok obciążenia ciągłego – znana wartość}$$

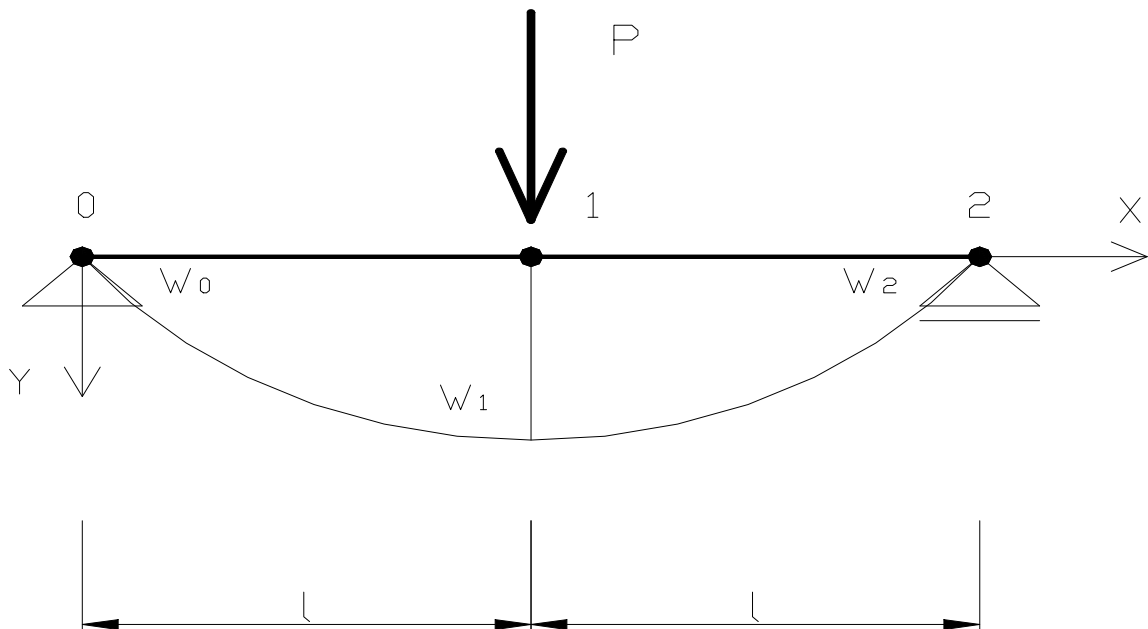
Teraz, w ogólnym przypadku dopuszczającym występowanie wszystkich rodzajów nieciągłości w funkcji ugięcia, człon korekcyjny składa się oprócz znanych z poprzedniego rozdziału wartości pochodnych wyższego rzędu (tu *III* i *IV*) także z wartości skoków odpowiednich pochodnych w rozważanym węźle. Wszystkie z nich, w przypadku zadań belek zginanych są znane już z poziomu statyki rozważanego problemu ugięcia belki, natomiast w przypadku występowania nieciągłości katowej wartość skoku kąta ugięcia belki w węźle z

przegubem należy traktować jako dodatkową niewiadomą do układu równań, gdyż nie jest ona znana *a priori*. Wystąpienie przegubu zwalnia jeden z więzów kinematycznych, dlatego też dysponuje się dodatkowym równaniem pozwalającym na jednoznaczne wyznaczenie oprócz węzłowych wartości ugięć również wartości nieciągłości kątowej. Podobnie sprawa ma się z niewiadomymi hiperstycznymi w przypadku konstrukcji statycznie niewyznaczalnych, o których mowa będzie w rozdziale 6.

Podany wyżej algorytm dla belek będzie zilustrowany na kilku prostych przykładach.

Przykład 4.1

Belka taka jak w poprzednich przykładach obciążona jest siłą skupioną.



sformułowanie problemu brzegowego :

$$\mathcal{L}(x) = \frac{d^2}{dx^2} w(x) = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad 0 \leq x \leq 2l$$

gdzie :

$$M(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}Px, & 0 \leq x \leq l \\ \frac{1}{2}P(2l-x), & l < x \leq 2l \end{cases} \quad w(0) = 0 \quad w(2l) = 0$$

dyskretyzacja różnicowa :

$w_0 = 0 \quad w_2 = 0$ – warunki brzegowe

$Lw_1 = \frac{1}{l^2}(w_0 - 2w_1 + w_2)$ – operator

rozwiązanie klasyczne :

$$Lw_1 = f_1 \quad \frac{1}{l^2}(w_0 - 2w_1 + w_2) = -\frac{1}{2} \frac{Pl}{EJ} \rightarrow w_1^{(L)} = \frac{1}{4} \frac{Pl^3}{EJ}$$

W zadaniu tym nieciągłość występuje w III pochodnej ugięcia, wywołana jest obecnością siły skupionej na belce. Rozkład siły poprzecznej w okolicy węzła (I) można zapisać następująco:

$$Q(x) \sim w'''(x) + J^{(3)} \times H(x-l)$$

gdzie :

$H(x-l)$ – funkcja Heaviside'a

$J^{(3)}$ – wartość skoku trzeciej pochodnej

Po rozwinięciu operatora różnicowego w szereg Taylora :

$$Lw_1 = \frac{1}{l^2} \begin{cases} 1 \times [w_0 = w_1 - lw_1' + \frac{1}{2}l^2w_1'' - \frac{1}{6}l^3w_1''' + \frac{1}{24}l^4w_1^{IV} + R_0] \\ - 2 \times w_1 \\ 1 \times [w_2 = w_1 + lw_1' + \frac{1}{2}l^2w_1'' + \frac{1}{6}l^3(w_1''' + J^{(3)}) + \frac{1}{24}l^4w_1^{IV} + R_2] \end{cases}$$

oraz po zbilansowaniu składników otrzymujemy następujące wyrażenie :

$$Lw_1 = w_1'' + \frac{1}{6}lJ^{(3)} + \frac{1}{12}l^2w_1^{IV} = f_1 + \Delta_1$$

gdzie :

$$w_1'' = f_1 = -\frac{1}{2} \frac{Pl}{EJ} \quad \text{wartość prawej strony}$$

$$J^{(3)} = \frac{Pl}{EJ} \quad \text{wartość skoku III pochodnej ugięcia}$$

$$w_1^{IV} = q(x=l) = 0 \quad \text{brak obciążenia ciągłego}$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{6}lJ^{(3)} + \frac{1}{12}l^2w_1^{IV} = \frac{1}{6} \frac{Pl}{EJ} \quad \text{człon korekcyjny}$$

Przy obliczaniu wartości IV pochodnej wykorzystany został fakt zerowania się obciążenia ciągłego na belce. Ponieważ w rzeczywistości czwarta pochodna ugięcia okazuje się mieć postać delty Diraca (wymuszenie impulsowe w węźle (I)), nie można jej składać z wartości pochodnych II rzędu, tak jak w poprzednich przykładach, gdyż żaden wzór wielomianowy nie jest w stanie oddać postaci tej pseudofunkcji. Innym poprawnym sposobem na obliczenie wartości czwartej pochodnej jest jej dekompozycja aż do samych wartości funkcji :

$$w_0'' = \frac{w_0 - 2w_1^{(L)} + w_2}{l^2} = -\frac{1}{2} \frac{Pl}{EJ}, \quad w_1'' = \frac{w_0 - 2w_1^{(L)} + w_2}{l^2} = -\frac{1}{2} \frac{Pl}{EJ}, \quad w_2'' = \frac{w_0 - 2w_1^{(L)} + w_2}{l^2} = -\frac{1}{2} \frac{Pl}{EJ},$$

$$w_1^{IV} = \frac{w_0'' - 2w_1'' + w_2''}{l^2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) \frac{Pl}{EJ}}{l^2} = 0$$

Należy też zaznaczyć, że gdyby belka była dodatkowo tak obciążona, iż czwarta pochodna byłaby różna od zera, to licząc ją sposobem pierwszym należy nie uwzględniać wpływu obciążenia skupionego.

W ten oto sposób okazuje się, iż człon korekcyjny skupia w sobie wpływ jedynie wartości skoku *III* pochodnej czyli siły poprzecznej na belce. Tak więc nieuwzględniona w podejściu klasycznym (niskiego rzędu) wartość skoku siły ma decydujące znaczenie na zgodność rzędu dokładności wyniku z *IV* rzędem aproksymacji.

Ostateczne równanie i rozwiązanie różnicowe :

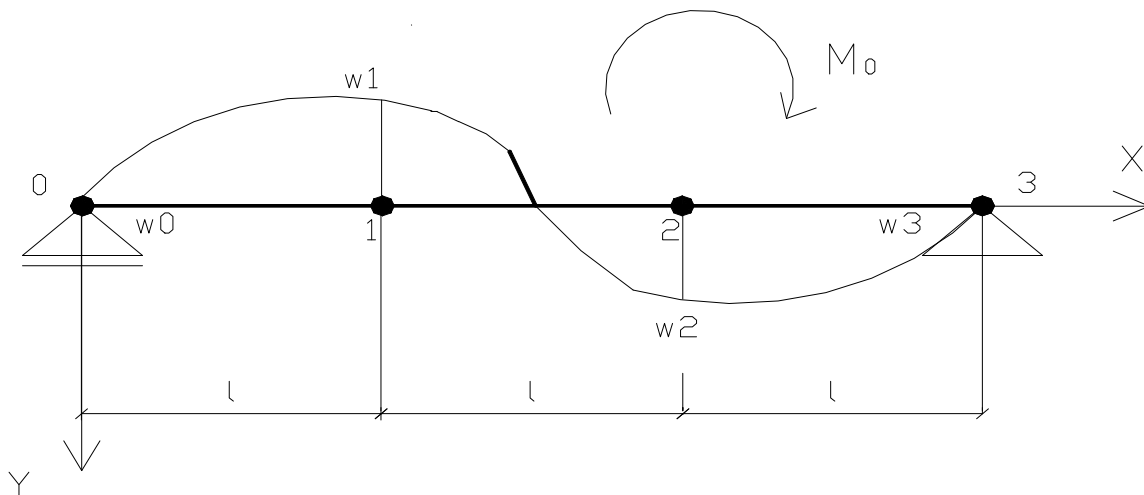
$$Lw_1 = f_1 + \Delta_1$$

$$\frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = -\frac{1}{3} \frac{Pl}{EJ} \quad \rightarrow \quad w_1^{(H)} = \frac{1}{6} \frac{Pl^3}{EJ}$$

jest zgodne z wynikiem analitycznym będącym wielomianem rzędu trzeciego, dla którego pominięta w rozwinięciu reszta $R = 0$.

Przykład 4.2

Belka swobodnie podparta obciążona momentem skupionym. Na belce założono cztery węzły, zrezygnowano ze symetrii rozwiązania, aby ugięcie w środku rozpiętości nie było zerowe. W zadaniu występuje skok w drugiej pochodnej ugięcia – w momencie zginającym.



sformułowanie zadania:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{d^2 w}{dx^2} = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 3l$$

warunki brzegowe : $w(0) = 0 \quad w(3l) = 0$

moment zginający :
$$M(x) = \begin{cases} -\frac{M_0 x}{3l} & \text{dla } 0 \leq x \leq 2l \\ \frac{M_0}{3l}(x-3l) & \text{dla } 2l \leq x \leq 3l \end{cases}$$

dyskretyzacja różnicowa :

$$Lw_1 = \frac{1}{l^2}(w_0 - 2w_1 + w_2) \quad Lw_2 = \frac{1}{l^2}(w_1 - 2w_2 + w_3) \quad w_0 = 0 \quad w_3 = 0$$

$$f_0 = 0 \quad f_1 = \frac{1}{3} \frac{M_0}{EJ} \quad f_2^{(l)} = \frac{2}{3} \frac{M_0}{EJ} \quad f_2^{(p)} = -\frac{1}{3} \frac{M_0}{EJ} \quad f_3 = 0$$

W dyskretnych wartościach funkcji prawej strony rozróżniono wartość po stronie prawej i lewej momentu skupionego przyłożonego w węźle (2).

rozwiązanie niskiego rzędu :

$$\begin{cases} Lw_1 = f_1 \\ Lw_2 = \frac{f_2^{(l)} + f_2^{(p)}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = \frac{1}{3} \frac{M_0}{EJ} \\ \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = \frac{1}{6} \frac{M_0}{EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1^{(L)} = -\frac{5 M_0 l^2}{18 EJ} \\ \mathbf{w}_2^{(L)} = -\frac{2 M_0 l^2}{9 EJ} \end{cases}$$

korekta operatorów :

$$Lw_1 = w_1'' + \frac{1}{12} l^2 w_1^{IV} + R_1 = f_1 + \Delta_1$$

gdzie : $w_1^{IV} = 0 \quad R_1 = 0 \quad \text{stad} : \Delta_1 = 0$

$$Lw_2 = \frac{1}{2}(w_2'' + w_2'' + J^{(2)}) + \frac{1}{12} l^2 w_2^{IV} + R_2 = w_2'' + \Delta_2$$

gdzie : $w_2^{IV} = 0 \quad R_2 = 0 \quad J^{(2)} = -\frac{M_0}{EJ} \quad \text{stad} : \Delta_2 = -\frac{1}{2} \frac{M_0}{EJ}$

rozwiązanie wyższego rzędu :

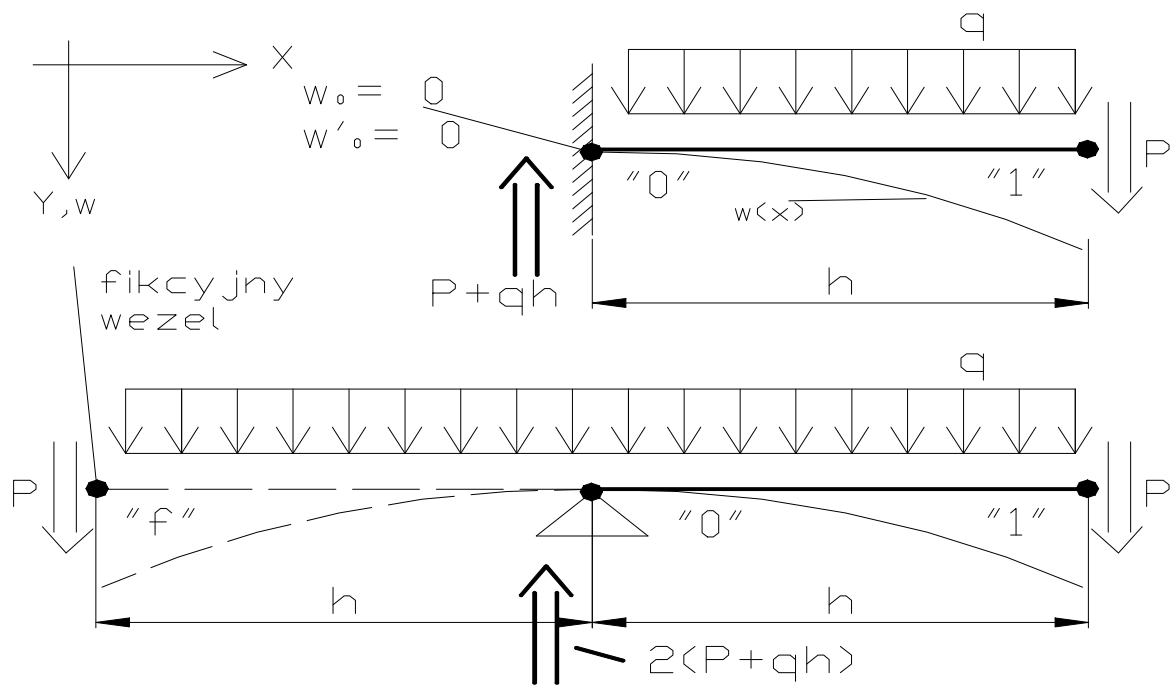
$$\begin{cases} Lw_1 = f_1 + \Delta_1 \\ Lw_2 = \frac{f_2^{(l)} + f_2^{(p)}}{2} + \Delta_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = \frac{1}{3} \frac{M_0}{EJ} + 0 \\ \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = \frac{1}{6} \frac{M_0}{EJ} - \frac{1}{2} \frac{M_0}{EJ} = -\frac{1}{3} \frac{M_0}{EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1^{(H)} = -\frac{1}{9} \frac{M_0 l^2}{EJ} \\ w_2^{(H)} = \frac{1}{9} \frac{M_0 l^2}{EJ} \end{cases}$$

Otrzymany wynik jest ścisły w ramach czwartego rzędu aproksymacji oraz pokrywa się z rozwiązaniem analitycznym.

Podany na początku rozdziału algorytm można efektywnie wykorzystać w celu zapewnienia tego samego rzędu aproksymacji (czwartego) nie tylko w obszarze ale także na jego brzegu. Jest to możliwe dzięki prostocie operatorów różniczkowych występujących w zadaniach z belkami. Nie jest to w żadnym wypadku podejście ogólne (patrz : rozdział 5), ale jedynie próba stworzenia ogólnego algorytmu statyki belek zginanych przy pełnym wykorzystaniu możliwości płynących z możliwości uwzględniania skoków w funkcji ugięcia oraz jej pochodnych. Zostaną wyróżnione dwa najczęściej występujące przypadki : pełne utwierdzenie oraz podparcie swobodne.

PEŁNE UTWIERDZENIE



Pomysł polega na tym, aby przedłużyć symetrycznie fragment belki tuż przy wsporniku wprowadzając jeden fikcyjny węzeł (f) w takiej samej odległości w jakiej leży najbliższy węzeł (1) węzła brzegowego (0). Wykorzystany jest tutaj fakt symetrii fikcyjnego ugięcia belki w węźle (f) w stosunku do węzła (1) wynikający z dyskretyzacji (niskiego rzędu) operatora różniczkowego na brzegu (na pierwszą pochodną ugięcia) za pomocą operatora centralnego :

$$\frac{d^2}{dx^2} w(x) = f(x) \quad , \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad w(0) = 0 \quad w'(0) = 0$$

$$w_0 = 0 \quad w'_0 = \frac{w_f - w_1}{2h} = 0 \quad \rightarrow \quad w_f = w_1$$

I tak, zamiast poprawiać operator różnicowy brzegowy, potraktujemy okolice wspornika jako przewieszoną belkę swobodnie podpartą, z odpowiednio dobranym obciążeniem. Poprawie ulegnie teraz „klasyczny” operator na drugą pochodną postawiony w węźle (0).

Zbierając reakcje do podpory swobodnej w węźle (0) dostaje się wartość $2(P+qh)$, którą potraktuje się jako siłę skupioną powodującą skok trzeciej pochodnej ugięcia (siły poprzecznej) na podporze.

Tak więc realizacja numeryczna jest taka sama jak w powyższych przykładach.

„Nowy” operator różnicowy na brzegu ma teraz postać :

$$Lw_0 = \frac{1}{h^2}(w_f - 2w_0 + w_1)$$

Rozwinięcie operatora w szereg *Taylor*a w węźle brzegowym (0) :

$$Lw_0 = \frac{1}{h^2} \begin{cases} w_0 - hw_0' + \frac{1}{2}h^2 w_0'' - \frac{1}{6}h^3 w_0''' + \frac{1}{24}h^4 w_0^{IV} + R_f \\ - 2w_0 \\ w_0 + hw_0' + \frac{1}{2}h^2 w_0'' + \frac{1}{6}h^3 (w_0''' + J_0^{(3)}) + \frac{1}{24}h^4 w_0^{IV} + R_1 \end{cases}$$

$$Lw_0 = w_0'' + \frac{1}{6}h J_0^{(3)} + \frac{1}{12}h^2 w_0^{IV} = f_0 + \Delta_0 \quad , \quad \text{gdzie :}$$

$$w_0'' = f_0 = -\frac{M_0}{EJ}$$

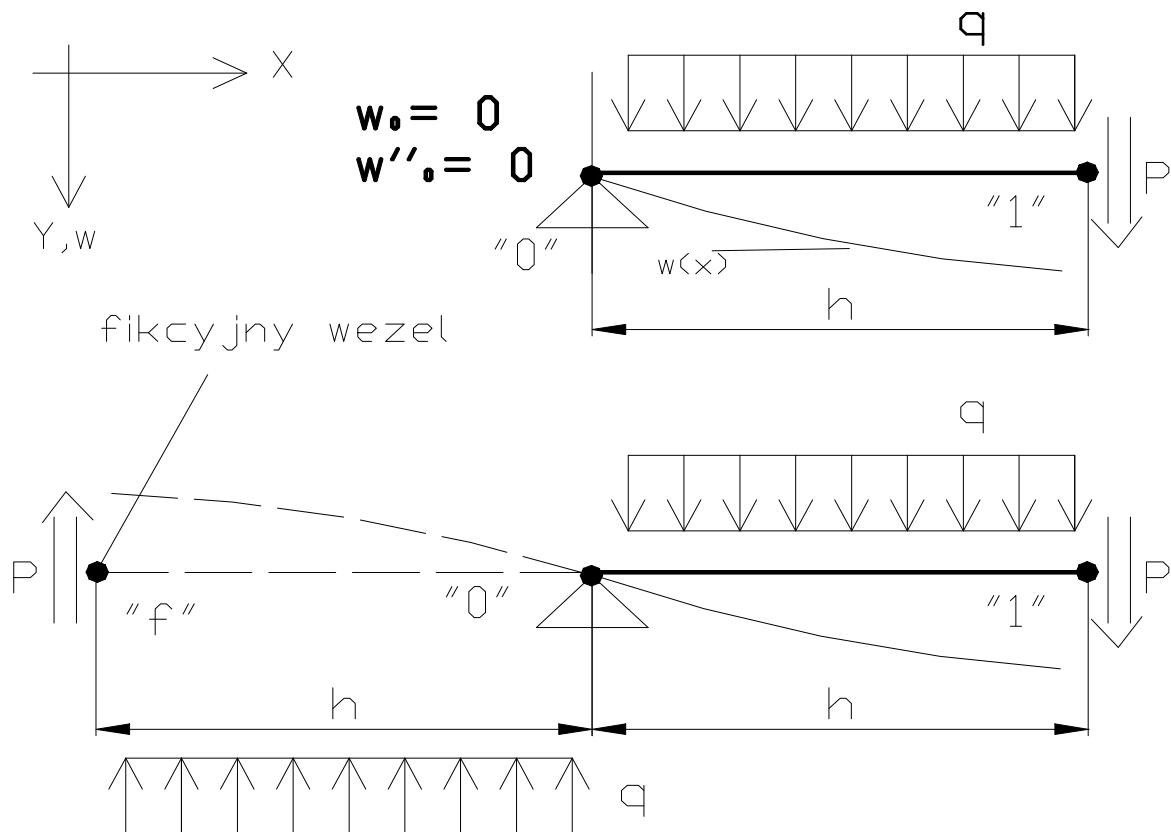
$$J_0^{(3)} = -\frac{2}{EJ}(P + qh)$$

$$w_0^{IV} = \frac{q}{EJ}$$

$$\Delta_0 = \frac{1}{6}h J_0^{(3)} + \frac{1}{12}h^2 w_0^{IV} = -\frac{h}{EJ} \left(\frac{1}{3}P + \frac{1}{4}qh \right)$$

Tak policzony wyraz korekcyjny dodany do prawej strony równania różnicowego na brzegu, uzupełniony o pozostałe równania zapewni w efekcie ścisłość rozwiązania dla czwartego rzędu aproksymacji w całym obszarze i na jego brzegu.

PODPARCIE SWOBODNE



Sformułowanie problemu

$$\frac{d^2}{dx^2} w(x) = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad x \in (0, L) \quad w(0) = 0 \quad w'(0) = 0$$

Dyskretyzacja warunków brzegowych

$$w_0 = 0 \quad w''_0 = 0 \quad w''_0 = \frac{w_f - 2w_0 + w_1}{h^2} \rightarrow w_f = -w_1$$

W przypadku podpory swobodnej fragment belki wraz z jej obciążeniem od węzła brzegowego (0) do pierwszego węzła w obszarze przedłużyć można antysymetrycznie ze względu na wstępną dyskretyzację drugiej pochodnej na brzegu. Zerowanie się momentu zginającego na podporze (tzw. warunek brzegowy statyczny) można bowiem potraktować jako dodatkowy warunek na brzegu obszaru mimo, iż równanie różniczkowe w obszarze jest

rzędu pierwszego. Jest to dopuszczalne w przypadku, gdy konieczne jest wprowadzenie węzłów fikcyjnych poza obszarem w celu podniesienia ogólnej liczby węzłów do generacji równań różnicowych.

Operator różnicowy brzegowy :

$$Gw_0 = \frac{1}{h^2} \begin{cases} w_0 - hw_0' + \frac{1}{2}h^2w_0'' - \frac{1}{6}h^3w_0''' + \frac{1}{24}h^4w_0^{IV} + R_f \\ -2w_0 \\ w_0 + hw_0' + \frac{1}{2}h^2w_0'' + \frac{1}{6}h^3w_0''' + \frac{1}{24}h^4(w_0^{IV} + J_0^{(4)}) + R_1 \end{cases}$$

$$Gw_0 = w_0'' + \frac{1}{12}h^2w_0^{IV} + \frac{1}{24}h^2J_0^{(4)} = f_0 + \Delta_0$$

$$f_0 = 0 \quad J_0^{(4)} = \frac{2q}{EJ} \quad w_0^{IV} = 0$$

$$\Delta_0 = \frac{1}{12}h^2w_0^{IV} + \frac{1}{24}h^2J_0^{(4)} = \frac{1}{12} \frac{qh^2}{EJ}$$

Tym razem przy korekcie operatora różnicowego na brzegu uwzględnia się w członie korekcyjnym niezerową wartość skoku obciążenia ciągłego, powstałego przez antysymetryczny rozkład obciążenia na rozważanym fragmencie belki.

Nowa dyskretyzacja warunku brzegowego w podparciu swobodnym wygląda następująco :

$$Gw_0 = f_0 + \Delta_0 \rightarrow \frac{w_f - 2w_0 + w_1}{h^2} = \frac{1}{12} \frac{qh^2}{EJ}$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \text{„stara” dyskretyzacja (} \Delta_0 = 0 \text{)} \quad w_f = -w_1 \end{array}$$

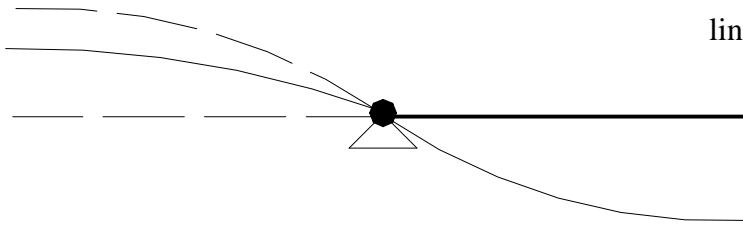
$$\begin{array}{l} \longrightarrow \text{„nowa” dyskretyzacja (} \Delta_0 \neq 0 \text{)} \quad w_f = -w_1 + \frac{1}{12} \frac{qh^4}{EJ} \end{array}$$

Łatwo zauważyć, iż początkowa antysymetria, wynikająca ze starej dyskretyzacji (czyli niskiego rzędu) uległa korekcie, i fikcyjne ugięcie w węźle (f) jest nieco mniejsze niż jego odpowiednik po stronie rzeczywistej belki – w węźle (1) – wszystko w ramach ścisłości dla czwartego rzędu aproksymacji wielomianowej.

Powyższe rozważania można wykorzystać w dziedzinie statyki belek sprężystych oraz w innych prostych problemach brzegowych. W bardziej złożonych zadaniach należy opracować osobny schemat podejścia wyższego rzędu dla operatorów brzegowych. Stanowi to tematykę

linia przerywana – pełna antysymetria

linia ciągła – antysymetria + korekta



następnego rozdziału, natomiast wykorzystanie całego aparatu obliczeniowego uwzględniającego skoki przedstawia rozdział 6.

Na sam koniec jeszcze jeden przykład : wykorzystanie algorytmu dla podparcia swobodnego dla belki z przykładu 2.1. Tam nie udało się uzyskać „najlepszego”, ścisłego wyniku przy zastosowaniu operatora wyższego rzędu. Teraz można już skutecznie poprawić operator różnicowy na drugą pochodną postawiony w węźle brzegowym.

Przykład 4.3

Przypomnienie sformułowania problemu zadania z przykładu 2.1 :

$$\mathcal{L}(x) = \frac{d^2}{dx^2} w(x) = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad 0 \leq x \leq 2l$$

$$M(x) = \frac{1}{2} qx(2l - x) \quad w(0) = 0 \quad w(2l) = 0$$

Operator różnicowy pięciowęzłowy miał następującą postać :

$$L^{(H)} w_i = \frac{1}{12h^2} (-w_{i-2} + 16w_{i-1} - 30w_i + 16w_{i+1} - w_{i+2})$$

warunek brzegowy :

$$w_f = -w_1 + \frac{1}{12} \frac{ql^4}{EJ} \quad f = (f_1, f_2) \quad (*)$$

kolokacja w węźle środkowym belki (2) :

$$L^{(H)} w_1 = f_1 \rightarrow \frac{-2w_f - 30w_1}{12l^2} = -\frac{1}{2} \frac{ql^2}{EJ} \rightarrow -28w_1 = -\frac{35}{6} \frac{ql^4}{EJ}$$

Ostateczne rozwiązanie po podstawieniu do powyższego wyrażenia za w_f związku (*):

$$w_1^{(H)} = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EJ}$$

okazuje się być w końcu zgodne z wynikiem analitycznym.

ROZDZIAŁ 5 :

DYSKRETYZACJA WARUNKÓW BRZEGOWYCH

W rozdziale będzie mowa o osobnym schemacie postępowania w przypadku, gdy konieczne jest wymuszenie odpowiedniego rzędu aproksymacji wielomianowej na brzegu obszaru. Jak dotąd pokazano postępowanie dla operatorów różnicowych w obszarze, gdy ich korekta sprowadzała się do obliczenia członu korekcyjnego. Wyraz ów mógł składać się z pochodnych wyższego rzędu oraz z wartości skoku poszczególnych pochodnych niewiadomej funkcji. Dla operatorów centralnych, symetrycznych korekta nie była zwykle zbyt uciążliwa do obliczania.

Układanie oraz poprawianie operatorów różnicowych na brzegu również jest możliwe i w zasadzie konieczne, z tym zastrzeżeniem, iż cechuje je o wiele mniejsza dokładność niż w przypadku operatorów z wnętrza obszaru. Proponowane podejście aproksymacji wyższego rzędu operatorów brzegowych pokazuje jak robić to w sposób najbardziej racjonalny, aby ich korekta nie była zbyt uciążliwa do wykonania a zarazem wykorzystywała algorytmy zaprezentowane w poprzednich rozdziałach. Podejście po raz pierwszy zaproponowano w [2].

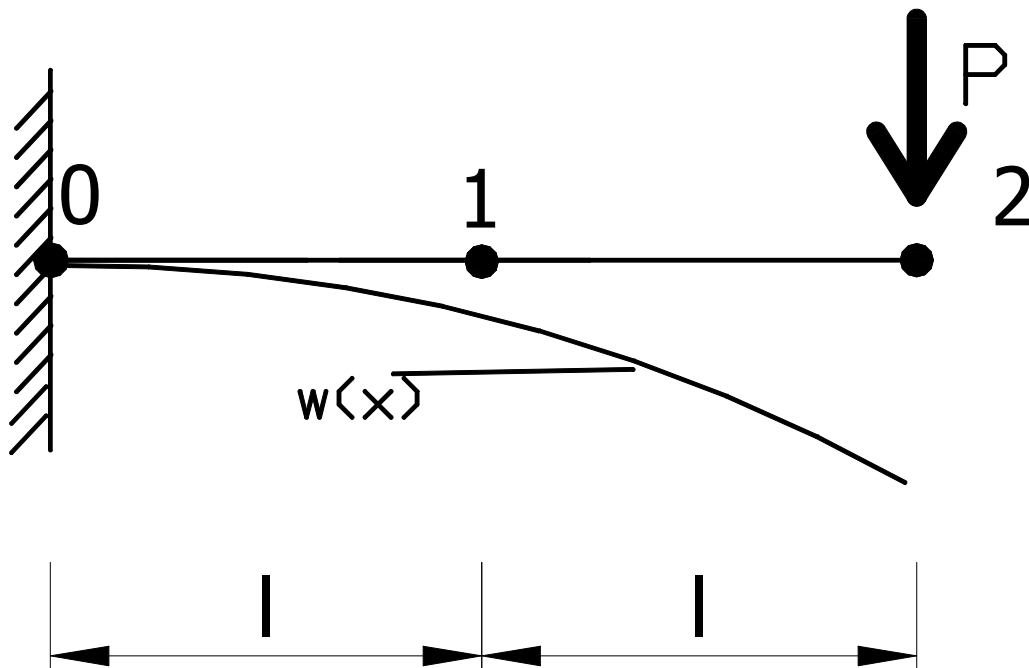
W MRS możliwe sposoby dyskretyzacji operatora różniczkowego na brzegu to :

- dyskretyzacja jedynie za pomocą samej wartości funkcji we wnętrzu obszaru – sposób najprostszy ale najbardziej prymitywny, gdyż operatory różnicowe tak zbudowane są na ogół mało dokładne,
- dyskretyzacja za pomocą operatora różnicowego bazującego, podobnie jak w MES, na różnych stopniach swobody w węzłach – oprócz samej wartości funkcji także na pochodnych kierunkowych, np. normalnych do brzegu, wartościach rozmaitych operatorów różnicowych etc.,
- dyskretyzacja za pomocą operatorów różnicowych bazujących na sztucznie wprowadzonych, fikcyjnych węzłach poza obszarem w celu uzyskania jak największej dokładności dyskretyzacji brzegowej (porównywalnej z tą w obszarze) – sposób najlepszy, ale tylko w niektórych typach zadań; w zadaniach stateczności i dynamiki nie polecany (więcej węzłów podnosi tzw. masę układu),
- aproksymacja wyższego rzędu na brzegu obszaru – bazująca na korekcie dowolnego zastosowanego wcześniej operatora różnicowego brzegowego, tak aby był on ściśły

dla założonego rzędu aproksymacji wewnątrz obszaru, oraz aby wynik ostateczny był niezależny od jakości operatora różnicowego zastosowanego na brzegu obszaru.

Pierwsze trzy klasyczne sposoby zostaną ze sobą skonfrontowane na wstępnym przykładzie zadania ugięcia belki wspornikowej.

Przykład 5.1



Belka wspornikowa o długości $2l$ jest obciążona siłą skupioną przyłożoną na końcu wspornika. Na belce założono trzy węzły. Należy zadanie rozwiązać stosując trzy rodzaje dyskretyzacji operatora różniczkowego na brzegu.

$$\mathcal{L}(x) = \frac{d^2 w}{dx^2} = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 2l$$

$$M(x) = \frac{P}{EJ}(x - 2l) \quad w(0) = 0 \quad w'(0) = 0$$

operator różniczkowy na brzegu :

$$\mathcal{G}(x) = \frac{d}{dx} w(x) \quad \text{dla } x = 0$$

ściśle rozwiązanie analityczne dla ugięć we węzłach :

$$\tilde{w}_1 = \frac{5 Pl^3}{6 EJ} \quad \tilde{w}_2 = \frac{8 Pl^3}{3 EJ}$$

sposoby na uwzględnienie warunku brzegowego $w'(0) = 0$ (wraz z pozostałymi równaniami różnicowymi, rozwiązaniem niskiego rzędu i poziomem błędu względnego w węzłach) :

- operator różnicowy wprzód (na pierwszą pochodną) – najmniej dokładny! :

$$\begin{cases} w'_0 \approx Gw_0 = \frac{w_1 - w_0}{l} = 0 \Rightarrow \mathbf{w_1 = w_0 = 0} \\ w''_1 \approx \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = f_1 = \frac{Pl}{EJ} \Rightarrow \mathbf{w_2 = \frac{Pl^3}{EJ}} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_1 = \left| \frac{w_1 - \tilde{w}_1}{\tilde{w}_1} \right| = 1.0}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_2 = \left| \frac{w_2 - \tilde{w}_2}{\tilde{w}_2} \right| = 0.625}$$

- operator zbudowany na różnych stopniach swobody w węzle brzegowym (w, w') :

$$w''_i \approx -\frac{2}{h^2} w_i - \frac{2}{h} w'_i + \frac{2}{h^2} w_{i+1}$$

$$\begin{cases} w''_0 \approx -\frac{2}{l^2} w_0 - \frac{2}{l} w'_0 + \frac{2}{l^2} w_1 = f_0 = 2 \frac{Pl}{EJ} \\ w''_1 \approx \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = f_1 = \frac{Pl}{EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{w_1 = \frac{Pl^3}{EJ}} & \boldsymbol{\varepsilon_1 = 0.2} \\ \mathbf{w_2 = 3 \frac{Pl^3}{EJ}} & \boldsymbol{\varepsilon_2 = 0.125} \end{cases}$$

- wprowadzenie węzła fikcyjnego (f) i iloraz centralny na brzegu :

$$w'_0 \approx \frac{w_1 - w_f}{2l} = 0 \Rightarrow w_f = w_1$$

$$\begin{cases} w''_0 \approx \frac{w_f - 2w_0 + w_1}{l^2} = f_0 = 2 \frac{Pl}{EJ} \\ w''_1 \approx \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = f_1 = \frac{Pl}{EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{w_1 = \frac{Pl^3}{EJ}} & \boldsymbol{\varepsilon_1 = 0.2} \\ \mathbf{w_2 = 3 \frac{Pl^3}{EJ}} & \boldsymbol{\varepsilon_2 = 0.125} \end{cases}$$

Analizując wyniki można łatwo stwierdzić, iż pierwsza dyskretyzacja z użyciem mało dokładnego operatora różnicowego wprzód na pierwszą pochodną (interpolacja liniowa) dała niemalże absurdalne wyniki w postaci zerowego ugięcia w węźle (1). Pozostałe sposoby są o wiele lepsze, wyniki są identyczne z powodu zastosowania kwadratowej interpolacji przy brzegu. Nie są one jednak ściśle, tzn. pominięto niezerowe człony wyższego rzędu. Ich uwzględnienie będzie możliwe dzięki opracowaniu ogólnego algorytmu korekty dowolnego zastosowanego operatora różnicowego na brzegu obszaru.

SFORMUŁOWANIE DYSKRETYZACJI WARUNKÓW BRZEGOWYCH DLA
APROKSYMACJI WYŻSZEGO RZĘDU

Rozważany problem brzegowy :

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{w } \Omega$$

$$\mathcal{G}u = g \quad \text{na } \partial\Omega$$

\mathcal{L} – operator różniczkowy wewnątrz obszaru (rzędu n -tego)

\mathcal{G} – operator różniczkowy brzegowy

Procedura rozwiązania problemu wygląda następująco :

- dyskretyzacja warunku brzegowego niskiego rzędu $\mathcal{G}u_0$ (dowolny sposób) :

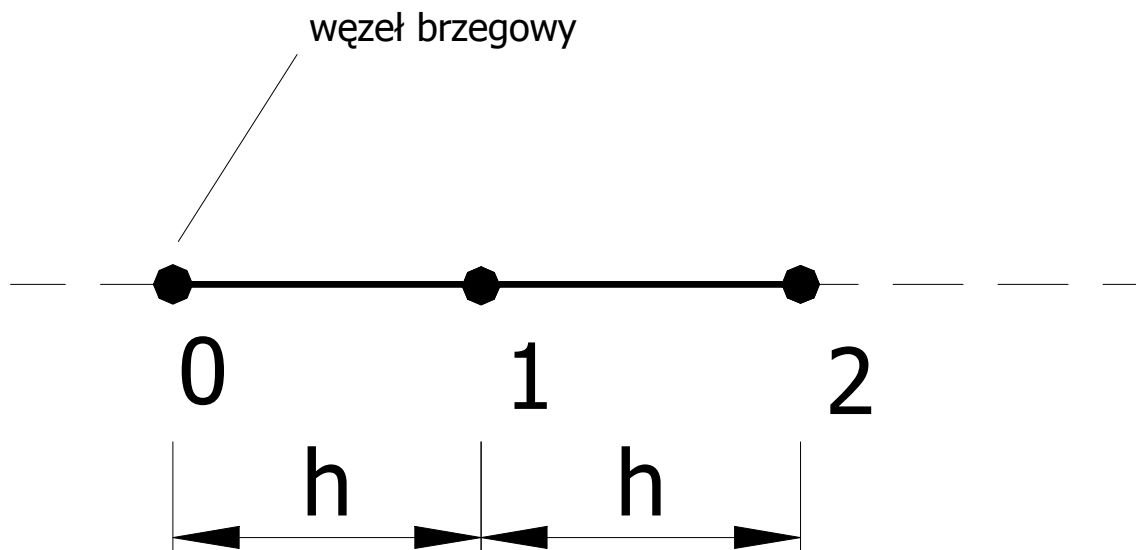
$$\mathcal{G}u_0 \approx Gu_0$$
- rozwinięcie operatora różnicowego Gu_0 w szereg *Taylora* w węzłach brzegowych :

$$Gu_0 = g_0 + \Delta_0[u_0, u'_0, \dots, u_0^{(n)}, u_0^{(n+1)}, \dots, u_0^{(2n)}]$$
- eliminacja pochodnych niskiego rzędu na brzegu $u_0, u'_0, \dots, u_0^{(n)}$ przez użycie :
 - warunku brzegowego : $\mathcal{G}u_0 = g_0$
 - równania różniczkowego (rzędu n -tego) w obszarze $\mathcal{L}u_0 = f_0$,
- zastąpienie pochodnych wyższego rzędu na brzegu $u_0^{(n+1)}, \dots, u_0^{(2n)}$ przez pochodne w węźle wewnątrz obszaru (rozwinięcie w szereg) , np. :

$$u_0^{III} = u_1^{III} - hu_1^{IV} \quad u_0^{IV} = u_1^{IV}$$
- obliczenie pochodnych wyższego rzędu wewnątrz obszaru :
 - składanie operatorów (kompozycja formuł różnicowych),
 - inne techniki (różniczkowanie równania w obszarze, *multipoint*).

W szczególności można podać sposób na aproksymację wyższego rzędu na brzegu dla przypadku jednowymiarowego (1D) oraz dwuwymiarowego (2D) – patrz rozdział 9. Założono dla skupienia uwagi konkretne postacie operatorów różniczkowych : pełny drugi rząd w obszarze oraz pełny pierwszy na brzegu.

DYSKRETYZACJA WARUNKÓW BRZEGOWYCH – PRZYPADEK 1D



Dany jest problem brzegowy 1D :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x) &= f(x) \quad \text{dla } x \in \Omega \quad \Omega = (0, L) \\ \mathcal{G}u(x) &= g(x) \quad \text{dla } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Niech :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u_0 &= au_0 + bu_0' + cu_0'' = f_0 \\ \mathcal{G}u_0 &= \alpha u_0 + \beta u_0' = g_0 \quad \text{dla } x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} u_0' &= \frac{g_0 - \alpha u_0}{\beta} \\ u_0'' &= \frac{f_0 - au_0 - bu_0'}{c} \end{aligned}$$

Z zapisania równania różniczkowania w obszarze i na brzegu można wyznaczyć wartości pochodnych niskiego rzędu w węzle brzegowym. Posłużą one później do obliczania wartości poprawki operatora.

Dyskretyzacja różnicowa warunków brzegowych (niskiego rzędu) :

$$Gu_0 = \alpha u_0 + \beta \frac{u_1 - u_0}{h}$$

Rozwinięcie operatora różnicowego w szereg *Taylora* :

$$Gu_0 = \alpha u_0 + \beta u_0' + \beta \left(\frac{1}{2} u_0'' h + \frac{1}{6} u_0''' h^2 + \frac{1}{24} u_0^{IV} h^3 \right) + R = g_0 + \Delta_0$$

Po eliminacji wartości pochodnych niskich rzędów (u' , u'') pozostaje obliczyć wartości pochodnych wyższych rzędów (u''' , u^{IV}). Pierwszy etap to sprowadzenie pochodnych brzegowych do pochodnych w obszarze a następnie ich obliczenie znanymi już sposobami.

rozwinięcie w szereg względem węzła (l) – najbliższego z obszaru :

$$u_0''' = u_1''' - h u_1^{IV}, \quad u_0^{IV} = u_1^{IV}$$

Ostateczna postać członu korekcyjnego to :

$$\Delta(u_0'', u_0''', u_0^{IV}) = \Delta(u_0, g, f, u_1''', u_1^{IV})$$

Największą zaletą proponowanego sposobu aproksymacji jest przeniesienie ciężaru składania operatorów z brzegu do wnętrza obszaru, gdzie zazwyczaj dysponuje się bardzo dokładnymi centralnymi, czasem również symetrycznymi operatorami różnicowymi, a ich wartości mogą być znane z pierwszego etapu zadania, czyli z rozwiązania niskiego rzędu.

Podobny tok rozumowania można przeprowadzić w $2D$, choć tam liczba potrzebnych do obliczenia pochodnych cząstkowych wzrasta niewspółmiernie...

Przykład 5.2

Zadanie z poprzedniego przykładu zostanie powtórnie rozwiązane w trzech wariantach, ale teraz z użyciem technik wyższego rzędu.

- operator wprzód (interpolacja liniowa) :

rozwiązanie **I** etapu :

$$\begin{cases} w_0' \approx Gw_0 = \frac{w_1 - w_0}{l} = 0 \Rightarrow \mathbf{w}_1^{(L)} = \mathbf{w}_0 = \mathbf{0} \\ w_1'' \approx \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = f_1 = \frac{Pl}{EJ} \Rightarrow \mathbf{w}_2^{(L)} = \frac{Pl^3}{EJ} \end{cases}$$

korekta operatora (rozwinięcie w szereg / człon korekcyjny) :

$$w_1 = w_0 + l w_0' + \frac{1}{2} l^2 w_0'' + \frac{1}{6} l^3 w_0''' + \frac{1}{24} l^4 w_0^{IV}$$

$$Gw_0 = w_0' + \frac{1}{2}lw_0'' + \frac{1}{6}l^2w_0''' + \frac{1}{24}l^3w_0^{IV} = w_0' + \Delta_0$$

przy obliczaniu członu korekcyjnego posłużono się : równaniem brzegowym (w^I) oraz równaniem z obszaru zapisanym na brzegu (w^{II}), natomiast w^{III} , w^{IV} należy najpierw „przenieść” do pierwszego węzła w obszarze, a potem złożyć z wartości drugich pochodnych :

$$\Delta_0 = \frac{1}{2}lw_0'' + \frac{1}{6}l^2w_0''' + \frac{1}{24}l^3w_0^{IV} \quad w_0^I = g_0 = 0 \quad w_0^{II} = f_0 = 2\frac{Pl}{EJ}$$

$$w_0^{III} = w_1^{III} - lw_1^{IV} \quad w_0^{IV} = w_1^{IV}$$

$$w_1^{III} = (w_1^I)'' = \frac{w_2^{II} - w_0^{II}}{2l} = \frac{0 - 2\frac{Pl}{EJ}}{2l} = -\frac{P}{EJ}$$

$$w_1^{IV} = (w_1^{II})'' = \frac{w_0^{II} - 2w_1^{II} + w_2^{II}}{l^2} = \frac{2\frac{Pl}{EJ} - 2\frac{Pl}{EJ} + 0}{l^2} = 0$$

$$\Delta_0 = \frac{Pl^2}{EJ} + \frac{1}{6}l^2\left(-\frac{P}{EJ}\right) - 0 = \frac{5Pl^2}{6EJ}$$

Człon korekcyjny dla operatora różnicowego z obszaru - kolokacja w węzle (1) – został obliczony zgodnie z wcześniejszymi zasadami :

$$\Delta_1 = \frac{1}{12}l^2w_1^{IV} = \frac{1}{12}(w_0^{II} - 2w_1^{II} + w_2^{II}) = \frac{1}{12}\left(2\frac{Pl}{EJ} - 2\frac{Pl}{EJ} + 0\right) = 0$$

rozwiązanie II etapu :

$$\begin{cases} w_0^I \approx \frac{w_1 - w_0}{l} = f_0 + \Delta_0 \\ w_1^{II} \approx \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = f_1 + \Delta_1 \end{cases}$$

Zapewniono ten sam, czwarty rząd aproksymacji na brzegu i w obszarze. Ponieważ rozwiązanie analityczne opisuje wielomian rzędu trzeciego, otrzymany wynik dyskretny jest wynikiem ścisłym :

$$\begin{cases} \frac{w_1 - w_0}{l} = 0 + \frac{5Pl^2}{6EJ} \Rightarrow \mathbf{w_1^{(H)} = \frac{5Pl^3}{6EJ}} \\ \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = \frac{Pl}{EJ} + 0 \Rightarrow \mathbf{w_2^{(H)} = \frac{8Pl^3}{3EJ}} \end{cases}$$

- operator zbudowany na różnych stopniach swobody (interpolacja parabolą) :

$$w_i^{II} \approx -\frac{2}{h^2}w_i - \frac{2}{h}w_i^I + \frac{2}{h^2}w_{i+1}$$

rozwiązanie I etapu :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0'' \approx -\frac{2}{l^2} w_0 - \frac{2}{l} w_0' + \frac{2}{l^2} w_1 = f_0 = 2 \frac{Pl}{EJ} \\ w_1'' \approx \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = f_1 = \frac{Pl}{EJ} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} w_1^{(L)} = \frac{Pl^3}{EJ} \\ w_2^{(L)} = 3 \frac{Pl^3}{EJ} \end{array} \right.$$

korekta operatora :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 = w_0 \\ w_0' = w_0' \\ w_1 = w_0 + l w_0' + \frac{1}{2} l^2 w_0'' + \frac{1}{6} l^3 w_0''' + \frac{1}{24} l^4 w_0^{IV} \end{array} \right.$$

$$Lw_0 = w_0'' + \frac{1}{3} l w_0''' + \frac{1}{12} l^2 w_0^{IV} = f_0 + \Delta_0$$

Pochodne wyższego rzędu obliczane są identycznie jak w pierwszym przypadku.

rozwiązanie II etapu :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0'' \approx -\frac{2}{l^2} w_0 - \frac{2}{l} w_0' + \frac{2}{l^2} w_1 = f_0 + \Delta_0 \\ w_1'' \approx \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = f_1 + \Delta_1 \end{array} \right.$$

$$f_0 = 2 \frac{Pl}{EJ}, \quad f_1 = \frac{Pl}{EJ} \quad \Delta_0 = -\frac{1}{3} \frac{Pl}{EJ} \quad \Delta_1 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{l^2} w_1 = \frac{5}{3} \frac{Pl}{EJ} \\ -\frac{2w_1 + w_2}{l^2} = \frac{Pl}{EJ} \end{array} \right.$$

Ostateczne rozwiązanie :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1^{(H)} = \frac{5 Pl^3}{6 EJ} \\ w_2^{(H)} = \frac{8 Pl^3}{3 EJ} \end{array} \right.$$

- węzeł fikcyjny + operator centralny (interpolacja parabolą) :
operator różnicowy na brzegu :

$$Gw_0 = \frac{w_1 - w_f}{2l}$$

operatory różnicowe w obszarze :

$$\begin{cases} Lw_0 = \frac{w_f - 2w_0 + w_1}{l^2} \\ Lw_1 = \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} \end{cases}$$

dyskretyzacja niskiego rzędu warunku brzegowego :

$$w_0' \approx \frac{w_1 - w_f}{2l} = 0 \Rightarrow w_f = w_1$$

rozwiązanie I etapu :

$$\begin{cases} w_0'' \approx \frac{w_f - 2w_0 + w_1}{l^2} = f_0 = 2 \frac{Pl}{EJ} \\ w_1'' \approx \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = f_1 = \frac{Pl}{EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1^{(L)} = \frac{Pl^3}{EJ} \\ \mathbf{w}_2^{(L)} = 3 \frac{Pl^3}{EJ} \end{cases}$$

korekta operatora różnicowego brzegowego :

$$Gw_0 = \frac{w_1 - w_f}{2l} = \begin{cases} w_0 + lw_0' + \frac{1}{2}l^2w_0'' + \frac{1}{6}l^3w_0''' + \frac{1}{24}l^4w_0^{IV} \\ 0 \\ w_0 - lw_0' + \frac{1}{2}l^2w_0'' - \frac{1}{6}l^3w_0''' + \frac{1}{24}l^4w_0^{IV} \end{cases}$$

$$Gw_0 = w_0' + \frac{1}{6}l^2w_0''' = g_0 + \Delta_0$$

$$g_0 = 0$$

$$\Delta_0 = \frac{1}{6}l^2w_0'''$$

$$w_0''' = w_1''' - lw_1^{IV}, \quad w_0^{IV} = w_1^{IV}$$

$$\begin{cases} w_1''' = (w_1')'' = \frac{w_2'' - w_0''}{2l} = -\frac{P}{EJ} \\ w_1^{IV} = (w_1'')'' = \frac{w_0'' - 2w_1'' + w_2''}{l^2} = 0 \end{cases}$$

$$w_0''' = -\frac{P}{EJ}, \quad w_0^{IV} = 0$$

$$\Delta_0 = -\frac{1}{6} \frac{Pl^2}{EJ}$$

Powyżej powtórzono wszystkie rachunki mające na celu obliczenie poprawki dla operatora brzegowego.

korekta operatorów różnicowych z obszaru :

$$Lw_0 = \frac{w_f - 2w_0 + w_1}{l^2} = f_0 + \Delta'_0$$

$$\Delta'_0 = \frac{1}{12} l^2 w_0^{IV} = 0$$

$$Lw_0 = 2 \frac{Pl}{EJ}$$

$$Lw_1 = \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = f_1 + \Delta_1$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{12} l^2 w_1^{IV} = 0$$

$$Lw_1 = \frac{Pl}{EJ}$$

Ostateczny układ równań to zestaw trzech równań różnicowych : jedno równanie dla operatora brzegowego i dwa dla operatorów z obszaru.

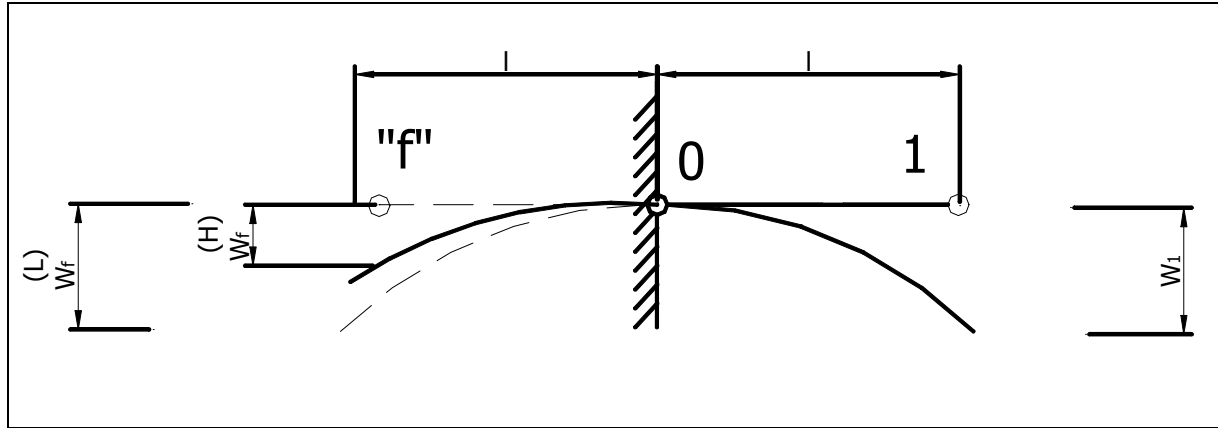
rozwiązanie **II** etapu :

$$\begin{cases} Gw_0 = g_0 + \Delta_0 \\ Lw_0 = f_0 + \Delta'_0 \\ Lw_1 = f_1 + \Delta_1 \end{cases} \begin{cases} \frac{w_1 - w_f}{2l} = -\frac{1}{6} \frac{Pl^2}{EJ} \\ \frac{w_f - 2w_0 + w_1}{l^2} = 2 \frac{Pl}{EJ} \\ \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = 2 \frac{Pl}{EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_f = w_1 + \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EJ} \quad (*) \\ w_f + w_1 = 2 \frac{Pl^3}{EJ} \\ -2w_1 + w_2 = \frac{Pl^3}{EJ} \end{cases} \begin{cases} w_1^{(H)} = \frac{5}{6} \frac{Pl^3}{EJ} \\ w_2^{(H)} = \frac{8}{3} \frac{Pl^3}{EJ} \end{cases}$$

Najciekawszy wydaje się być związek (*) pokazujący „nową” zależność między ugięciem węzła (l) a jego fikcyjnym odpowiednikiem (f). Absolutna równość między nimi (a więc i symetria) wynikały tylko z dyskretyzacji niskiego rzędu. Po uwzględnieniu wyrazów wyższego rzędu równość oraz symetria zostały zaburzone. Teraz wartość fikcyjnego ugięcia będzie się znacznie różnić, w zależności od wartości trzeciej pochodnej na brzegu. Ogólnie można ten fakt zapisać i zilustrować rysunkiem

$$w_f = w_1 - \frac{1}{3} l^3 w_0'''$$



linia przerywana - pełna symetria (niski rząd dyskretyzacji - II)

linia ciągła – symetria + korekta (wyższy rząd dyskretyzacji - IV)

ROZDZIAŁ 6 :

TECHNIKA WYŻSZEGO RZĘDU DLA STATYKI BELEK SPRĘŻYSTYCH

Rozdział jest próbą uogólnienia rozważań zawartych w poprzednich rozdziałach dla dowolnych zadań z dziedziny podstawowych zagadnień dotyczących belek sprężystych [7]. Przedstawione algorytmy służą do otrzymywania rozwiązań (np. ugięć belek) ściśle w ramach założonego czwartego stopnia aproksymacji wielomianowej jakiej podlega linia ugięcia belki. Zadania można podzielić na kilka grup :

- **Zadania statyki belek** : w przypadku obciążenia belek co najwyżej obciążeniem stałym (lub w przypadku symetrii operatora różnicowego obciążeniem liniowo zmiennym) możliwe jest otrzymywanie wyników dyskretnych pokrywających się z rozwiązaniem analitycznym (również wielomianowym); dzieje się tak wtedy i tylko wtedy gdy zostaną uwzględnione wszystkie czynniki wpływające na postać linii ugięcia belki : oprócz rodzaju obciążenia także nieciągłości w kolejnych pochodnych funkcji ugięcia oraz postaci warunków brzegowych (tzn. swobodne podparcie lub utwierdzenie). W dziedzinie belek sprężystych warto wyróżnić :

- *belki statycznie wyznaczalne* : równania statyki pozwalają jednoznacznie wyznaczyć rozkład sił przekrojowych, niewiadomymi są tylko ugięcia węzłowe,
- *belki statycznie niewyznaczalne* : duża liczba reakcji podpór powoduje, iż również prawa strona równań różnicowych zawiera w sobie niewiadome (ich liczba to stopień statycznej niewyznaczalności układu), końcowy układ równań algebraicznych oprócz ugięć węzłowych zawiera więc też reakcje więzów,
- *belki przegubowe (gerberowskie)* : każdy przegub determinuje dodatkową niewiadomą w układzie równań jaką jest nieciągłość kąta ugięcia w węzle z przegubem.

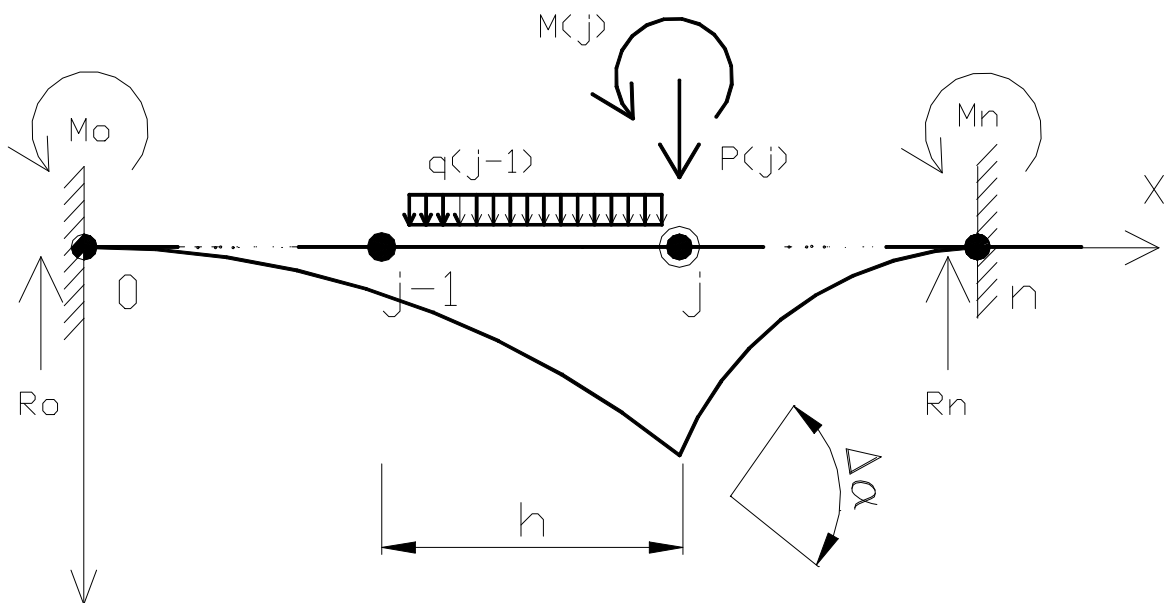
Ze względu na typ warunków brzegowych można wyróżnić :

- *belki swobodnie podparte* : dyskretyzacja warunków brzegowych na ogół nie przysparza trudności, dodatkowy statyczny warunek brzegowy (zerujący się moment zginający w podporze) można wykorzystać przy wprowadzeniu dodatkowych węzłów poza obszarem dokonując wstępnej antysymetryzacji fragmentu belki; potem należy skorygować operator różnicowy brzegowy przy użyciu techniki wliczania skoków do członu korekcyjnego,
- *belki utwierdzone (wsporniki)* : warunek brzegowy - zerujący się kąt ugięcia we wsporniku (pierwsza pochodna ugięcia) - musi być zdyskretyzowany niezależnie od operatorów różnicowych w obszarze; jest kilka możliwości z użyciem kilku typów aproksymacji przy brzegu, można też przedłużyć fragment belki przy wsporniku symetrycznie wprowadzając węzeł fikcyjny a następnie skorygować operator różnicowy z obszaru postawiony na brzegu przy wykorzystaniu teorii dotyczącej skoków.
- **Zadania stateczności i dynamiki belek** : chociaż aproksymowane jest pole przemieszczeń (linia ugięcia belki), to wielkościami szukanymi najczęściej są odpowiednio : siła krytyczna i częstość drgań (własnych bądź wymuszonych). Ugięcia ścisłe belek w tych typach zadań, o ile w ogóle istnieją, opisane są najczęściej za pomocą kombinacji funkcji trygonometrycznych, tak więc uzyskanie rezultatu ścisłego przy pomocy *MRS* jest niemożliwe, ale uwzględnienie jak największej liczby czynników (skoki, warunki brzegowe) w członie korekcyjnym może spowodować zbliżenie się do wartości analitycznych z żadaną dokładnością w ramach czwartego rzędu aproksymacji linii ugięcia belki.

Warto też nadmienić, iż w przypadku zadań w dziedzinie statyki belek węzły jest sens generować jedynie w miejscach „newralgicznych”, tj. na podporach, w przegubach, w miejscach przyłożenia obciążeń skupionych itp. Dalsze zwiększanie liczby węzłów na ogół nie ma żadnego sensu, o ile już przy pierwszej, najrzadszej dyskretyzacji obszaru otrzymano wynik ścisły. Natomiast ilość węzłów w przypadku drugiego typu zadań (stateczność/dynamika) będzie miała kluczowe znaczenie przy ustalaniu jakości końcowego wyniku.

Przy próbie ogólnego sformułowania zadania wykorzystano podejście *Clebscha*. Polega ono na dodawaniu kolejnych członów do równań sił przekrojowych wzdłuż osi belki. Symbol „+” na dole przy nawiasie oznacza, iż przyrost danej wielkości rozpoczyna się dopiero od miejsca określonego przez argument, natomiast wcześniej miała ona wartość 0.

OGÓLNE SFORMUŁOWANIE MRS WYŻSZEGO RZĘDU DLA BELEK



sformułowanie problemu :

$$\mathcal{L}(x) = \frac{d^2 w}{dx^2} = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad \text{dla } 0 \leq x \leq l$$

+ warunki brzegowe : $w(0) = 0, \dots, w(L) = 0$; $w'(0) = 0, \dots, w'(L) = 0$.

Na belce o długości L wprowadzono $n+1$ węzłów, w każdym z nich możliwy jest przyrost, zmiana bądź punkt przyłożenia obciążenia. Założono również dowolną krotność statycznej niewyznaczalności oraz dowolną liczbę przegubów, ale przy umowie, iż belka jest geometrycznie niezmienna. Siatka węzłów jest regularna, o rozstawie h ; wielkość rozstawu determinuje najmniejsza odległość między punktami na belce z obciążeniem, podporą bądź przegubem.

Rozkład sił przekrojowych w dowolnym, i -tym węźle przedstawiają równania :

$$M_i = -M_0 + \sum_{j=0}^{n-1} R_j (x_i - x_j)_+ - \sum_{j=0}^{n-1} P_j (x_i - x_j)_+ - \sum_{j=0}^{n-1} M_j H(x_i - x_j) - \sum_{j=1}^n q_{j-1} h [(x_i - x_j)_+ + \frac{h}{2}] - M_n$$

$$Q_i = \sum_{j=0}^{n-1} R_j H(x_i - x_j) - \sum_{j=0}^{n-1} P_j H(x_i - x_j) - \sum_{j=1}^n q_{j-1} h H(x_i - x_j)$$

$$q_i = \sum_{j=1}^n q_{j-1} H(x_i - x_j)$$

$$\Delta\alpha = \sum_{j=1}^{n-1} \Delta\alpha_j$$

gdzie :

H – funkcja *Heaviside'a*

$$(x-a)_+ = \begin{cases} x-a & \text{dla } x > a \\ 0 & \text{dla } x \leq a \end{cases}$$

Sformułowanie uzupełnione jest **równaniami statyki** :

$$\sum Y = -\sum_{j=0}^n R_j + \sum_{j=0}^n P_j + \sum_{j=1}^n q_{j-1} h = 0$$

$$\sum M_{(0)} = M_0 + \sum_{j=1}^n R_j x_j - \sum_{j=0}^n P_j x_j + \sum_{j=1}^n q_{j-1} h (x_j - \frac{h}{2}) + \sum_{j=0}^n M_j + M_n = 0$$

+ równania na przegub (prawa lub lewa strona) : (k = węzły przegubowe)

$$\sum M_{(k)}^{(l),(p)} = 0$$

1 etap : rozwiązanie klasyczne (rozwiązanie niskiego rzędu $w^{(L)}$)

$$Lw_i = f_i \quad , \quad i = 0 \dots n \quad \rightarrow \quad w_i^{(L)}$$

2 etap : rozwiązanie wyższego rzędu $w^{(H)}$

$$Lw_i = f_i + \Delta_i \quad , \quad i = 0 \dots n \quad \rightarrow \quad w_i^{(H)}$$

$$\Delta_i = \frac{\Delta\alpha_i}{h} + \frac{1}{2} J_i^{(2)} + \frac{1}{6} h J_i^{(3)} + \frac{1}{12} h^2 \frac{q_i}{EJ} + \frac{1}{24} h^2 J_i^{(4)}$$

gdzie :

$J^{(1)} = \Delta\alpha$ skok kąta ugięcia – dotatkowa niewiadoma

$J^{(2)} = \frac{M_i}{EJ}$ skok momentu zginającego – znana wartość

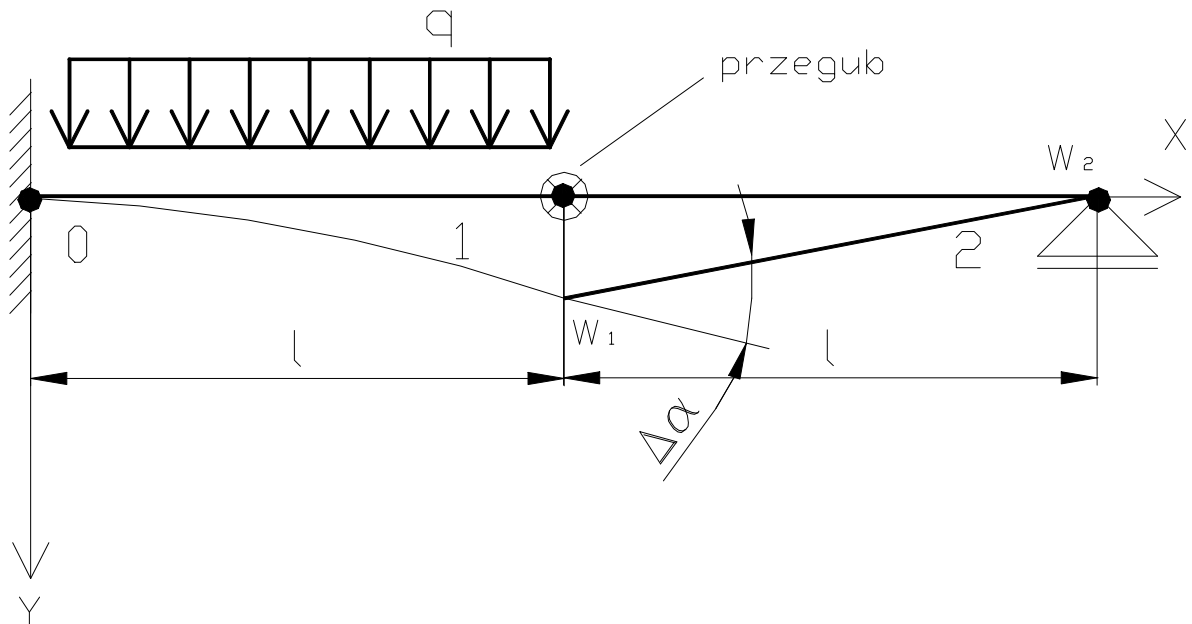
$J^{(3)} = \frac{Q_i}{EJ}$ skok siły poprzecznej – znana wartość

$J^{(4)} = \frac{q_i}{EJ}$ skok obciążenia ciągłego – znana wartość

W dalszej kolejności zostaną przedstawione przykłady ilustrujące praktyczne stosowanie powyższych algorytmów. Pierwszy przykład dotyczy utwierdzonej belki przegubowej, z jednym przegubem, na razie jeszcze statycznie wyznaczalnej. W tym przykładzie pokazano szczegółowo całą procedurę korekty operatorów różnicowych, łącznie z pełnymi rozwinięciami w szereg *Taylora*; w przykładach późniejszych tę część pominięto, skupiając się na końcowej postaci członów korekcyjnych.

Przykład 6.1

Belka wspornikowa przegubowa statycznie wyznaczalna.



sformułowanie problemu :

$$\mathcal{L}(x) = \frac{d^2 w}{dx^2} = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 2l$$

gdzie :

$$M(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}ql(x+l)^2, & 0 \leq x \leq l \\ 0, & l < x \leq 2l \end{cases} \quad w(0) = w(2l) = 0 \quad w'(0) = 0$$

dyskretyzacja różnicowa :

- warunki brzegowe $w_0 = 0 \quad w_2 = 0 \quad w'_0 = 0 \Rightarrow w_f = w_1$
- operator $Lw_i = \frac{1}{l^2}(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1})$

rozwiązanie klasyczne *MRS* (niskiego rzędu) :

$$Lw_0 = f_0 \quad \frac{1}{l^2}(w_f - 2w_0 + w_1) = \frac{1}{2} \frac{ql^2}{EJ} \rightarrow \mathbf{w}_1^{(u)} = \frac{\mathbf{1} \mathbf{q} l^4}{\mathbf{4} \mathbf{E} \mathbf{J}}$$

rozwińnięcie operatorów różnicowych w szereg *Taylora* w węzłach (0) i (1) :

$$(*) \quad Lw_0 = \frac{1}{l^2} \begin{cases} w_0 - lw'_0 + \frac{1}{2}l^2w''_0 - \frac{1}{6}l^3w'''_0 + \frac{1}{24}l^4w^{IV}_0 + R_f \\ -2w_0 \\ w_0 + lw'_0 + \frac{1}{2}l^2w''_0 + \frac{1}{6}l^3(w'''_0 + J_0^{(3)}) + \frac{1}{24}l^4w^{IV}_0 + R_1 \end{cases}$$

i dalej :

$$Lw_0 = w''_0 + \frac{1}{6}lJ_0^{(3)} + \frac{1}{12}l^2w^{IV}_0 = f_0 + \Delta_0$$

gdzie :

$$J_0^{(3)} = -2 \frac{ql}{EJ} \quad w^{IV}_0 = \frac{q}{EJ} \quad \Delta_0 = \frac{1}{6}lJ_0^{(3)} + \frac{1}{12}l^2w^{IV}_0 = -\frac{1}{4} \frac{ql^2}{EJ}$$

Łatwo zauważyć, iż przy korekcie operatora użyto sposobu ze symetrycznym przedłużeniem fragmentu przy wsporniku („od węzła do węzła”) opisanego w rozdziale 5.

$$(**) \quad Lw_1 = \frac{1}{l^2} \begin{cases} w_1 - lw'_1 + \frac{1}{2}l^2w''_1 - \frac{1}{6}l^3w'''_1 + \frac{1}{24}l^4w^{IV}_1 + R_0 \\ -2w_1 \\ w_1 + l(w'_1 + J_1^{(1)}) + \frac{1}{2}l^2w''_1 + \frac{1}{6}l^3w'''_1 + \frac{1}{24}l^4(w^{IV}_1 + J_1^{(4)}) + R_2 \end{cases}$$

co daje :

$$Lw_1 = \frac{J_1^{(1)}}{l} + w''_1 + \frac{1}{12}l^2w^{IV}_1 + \frac{1}{24}l^2J_1^{(4)} = f_1 + \Delta_1$$

gdzie :

$$J_1^{(1)} = \Delta\alpha \quad w^{IV}_1 = 0 \quad J_1^{(4)} = \frac{q}{EJ} \quad \Delta_1 = \frac{1}{l}\Delta\alpha + \frac{1}{24} \frac{ql^2}{EJ}$$

W powyższym rozwińnięciu operatora różnicowego zapisano kompletne rozwińnięcie wartości w_2 względem węzła (1) aż do wyrazu czwartego rzędu włącznie mimo, iż ze wstępnej analizy

statycznej konstrukcji wynika, iż część belki po stronie prawej przegubu zachowuje się jak mechanizm – wykonuje ruch sztywny (przesunięcie, obrót) ze względu na fakt zerowania się momentu zginającego. Pozwala to uprościć rozwinięcie w szereg na prawo od węzła (1) :

$$w_2 = w_1 + l(w_1' + J_1^{(1)}) + 0$$

Oczywiście wynik końcowy będzie identyczny. Warto zwrócić jednak uwagę na fakt, iż gdy znana jest *a priori* postać (wtedy zazwyczaj wielomianowa) rozwiązania można to wykorzystać przy rozwinięciu w szereg – znacznie uprości to obliczenia.

Końcowy układ równań przybiera więc postać :

$$\begin{cases} (*) & Lw_0 = f_0 + \Delta_0 \\ (**) & Lw_1 = f_1 + \Delta_1 \end{cases}$$

Obydwie wartości to wyniki ścisłe. Tylko bowiem przy ścisłej analitycznej wartości zmiany kąta w przegubie możliwe jest uzyskanie ścisłej wartości ugięcia.

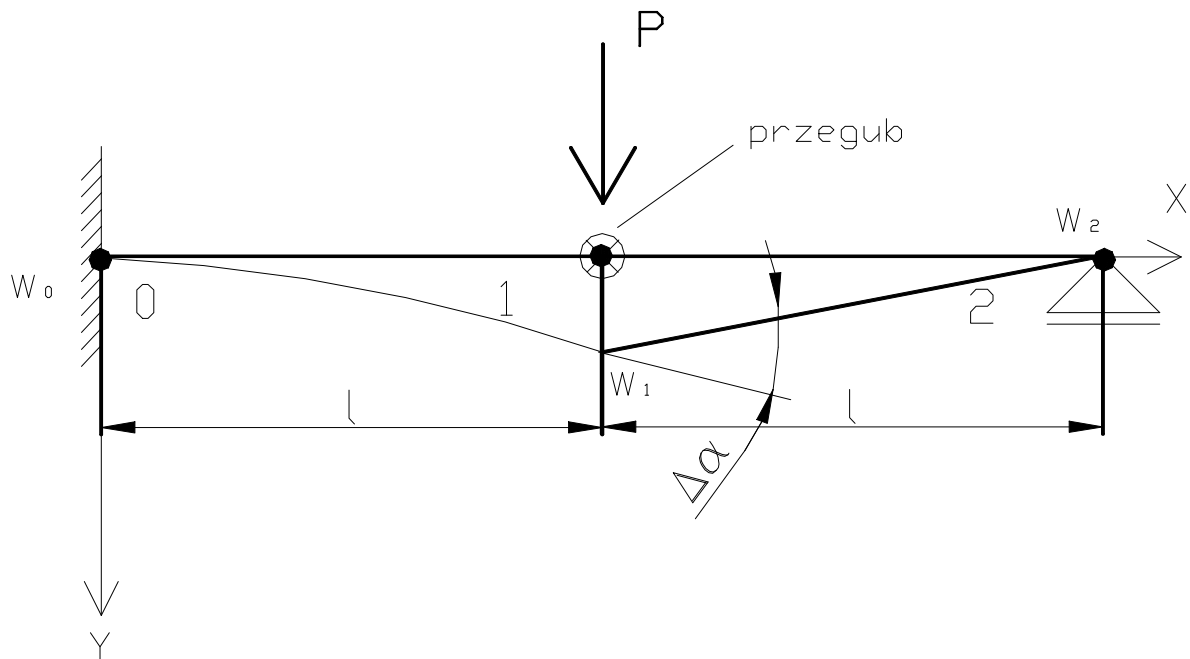
$$\begin{cases} \frac{2w_1}{l^2} = \frac{1}{2} \frac{ql^2}{EJ} - \frac{1}{4} \frac{ql^2}{EJ} \\ -\frac{2w_1}{l^2} = \frac{1}{l} \Delta\alpha + \frac{1}{24} \frac{ql^2}{EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2w_1}{l^2} = \frac{1}{4} \frac{ql^2}{EJ} \\ -\frac{2w_1}{l^2} - \frac{1}{l} \Delta\alpha = \frac{1}{24} \frac{ql^2}{EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1^{(H)} = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EJ} \\ \Delta\alpha = -\frac{7}{24} \frac{ql^3}{EJ} \end{cases}$$

Przykład 6.2

Przykład prawie identyczny jak wyżej. Zamiast obciążenia ciągłego na belce jest siła skupiona.



Sformułowanie problemu :

$$\frac{d^2}{dx^2} w(x) = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ}$$

$$w(0) = 0 \quad w'(0) = 0 \quad w(2l) = 0$$

Równania statyki :

$$\begin{cases} \sum Y = -R_0 + P - R_2 = 0 \\ \sum M_{(0)} = M_0 - Pl + 2R_2 l = 0 \\ \sum M_{(l)}^{(p)} = P_2 l = 0 \end{cases}$$

pozwalają na obliczenie wartości wszystkich reakcji więzów :

$$\begin{cases} R_0 = P \\ M_0 = Pl \\ R_2 = 0 \end{cases}$$

równanie momentu zginającego :

$$M(x) = -M_0 + R_0 x - P(x-l)_+ = P[x-l - (x-l)_+]$$

$$M(x) = \begin{cases} P(x-l), & x \in (0, l) \\ 0, & x \in (l, 2l) \end{cases}$$

równanie siły poprzecznej :

$$Q(x) = R_0 - P H(x-l) = P[1 - H(x-l)]$$

$$Q(x) = \begin{cases} P, & x \in (0, l) \\ 0, & x \in (l, 2l) \end{cases}$$

Na belce brak jest obciążenia ciągłego ($q(x) \equiv 0$), występuje jedna nieciągłość kąta ($\Delta\alpha_l$).

Dyskretyzacja różnicowa :

$$w_0 = 0 \quad w_2 = 0 \quad w'_0 = 0 \Rightarrow w_f = w_1$$

$$Lw_i = \frac{1}{l^2}(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1})$$

Etap I : rozwiązanie niskiego rzędu :

$$Lw_0 = f_0 \quad \frac{1}{l^2}(w_f - 2w_0 + w_1) = \frac{Pl}{EJ} \rightarrow \mathbf{w_1^{(l)} = \frac{1 Pl^3}{2 EJ}}$$

Etap II : rozwiązanie wysokiego rzędu :

$$Lw_0 = f_0 + \Delta_0 \quad \Delta_0 = \frac{1}{6}l J_0^{(3)} = \frac{1}{6}l \left(-2 \frac{P}{EJ}\right) = -\frac{1}{3} \frac{Pl}{EJ}$$

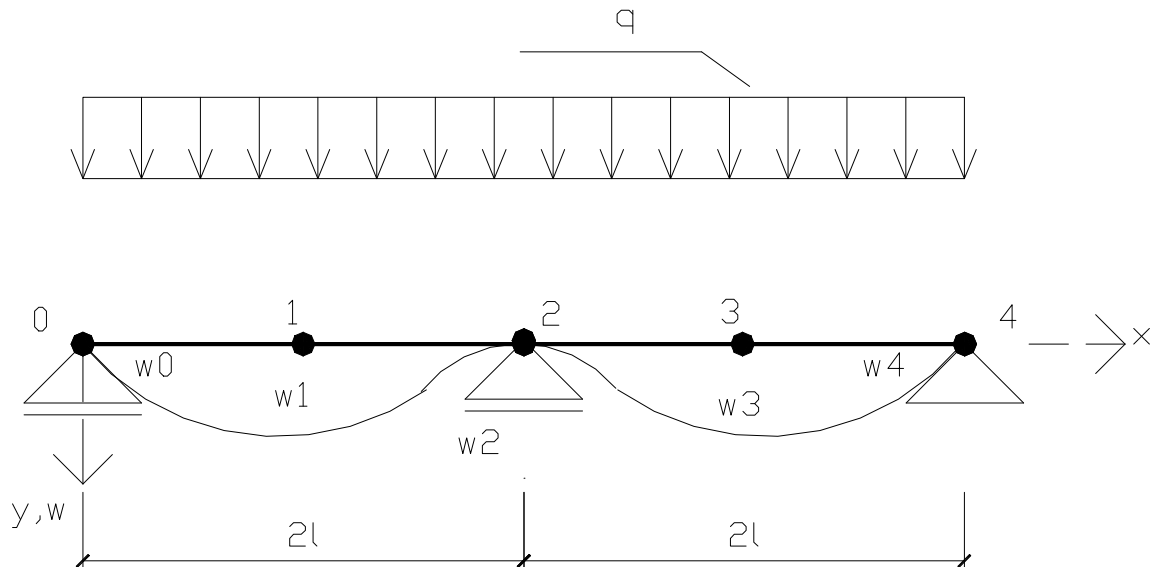
$$Lw_1 = f_1 + \Delta_1 \quad \Delta_1 = \frac{J_1^{(1)}}{l} + \frac{1}{6}l J_1^{(3)} = \frac{\Delta\alpha}{l} + \frac{1}{6} \frac{Pl}{EJ}$$

ostateczne rozwiązanie :

$$\begin{cases} \frac{2w_1}{l^2} = \frac{Pl}{EJ} - \frac{1}{3} \frac{Pl}{EJ} = \frac{2}{3} \frac{Pl}{EJ} \\ -\frac{2w_1}{l^2} - \frac{\Delta\alpha}{l} = \frac{1}{6} \frac{Pl}{EJ} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{w_1^{(H)} = \frac{1 Pl^3}{3 EJ}} \\ \mathbf{\Delta\alpha = -\frac{5 Pl^2}{6 EJ}} \end{cases}$$

Przykład 6.3

Belka swobodnie podparta statycznie niewyznaczalna.



sformułowanie problemu :

$$\frac{d^2}{dx^2} w(x) = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad w(0) = w(2l) = w(4l) = 0$$

Podparcie swobodne wymusza jedynie narzucenie zerowych wartości węzłowych ugięć, natomiast statyczna niewyznaczalność (jednokrotna) wymaga wprowadzenia dodatkowej niewiadomej (tu wybrano : wartość reakcji w podporze w węźle (4)). Przy dyskretyzacji wykorzystano też symetrię zadania.

warunki brzegowe : $w_0 = w_2 = w_4 = 0$

warunki symetrii : $w_1 = w_3$

niewiadome : $w_1, R_4 = R$

Z warunków statyki wynikają związki :

$$R_0 = R$$

$$R_2 = 4ql - 2R$$

a wartości węzłowe momentu zginającego wynoszą :

$$M_0 = M_4 = 0$$

$$M_1 = M_3 = \frac{1}{2}l(2R - ql)$$

$$M_2 = 2l(R - ql)$$

dyskretyzacja operatorów różniczkowych :

$$Lw_i = \frac{1}{l^2}(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}), i = 1,2$$

Etap I : rozwiązanie niskiego rzędu :

$$\left\{ \begin{array}{l} Lw_1 = f_1 \\ Lw_2 = f_2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{-2w_1}{l^2} = \frac{l(ql - 2R)}{2EJ} \\ \frac{2w_1}{l^2} = \frac{2l(ql - R)}{EJ} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w}_1^{(L)} = \frac{1}{6} \frac{ql^4}{EJ} \\ \mathbf{R} = \frac{5}{6} ql \end{array} \right.$$

człony korekcyjne – poprawki wyższego rzędu operatorów :

$$\Delta_1 = \frac{1}{12} l^2 \frac{q}{EJ}$$

$$\Delta_2 = -\frac{1}{6} \frac{l}{EJ} (4ql - 2R) + \frac{1}{12} l^2 \frac{q}{EJ} = \frac{1}{12} \frac{l}{EJ} (4R - 7ql)$$

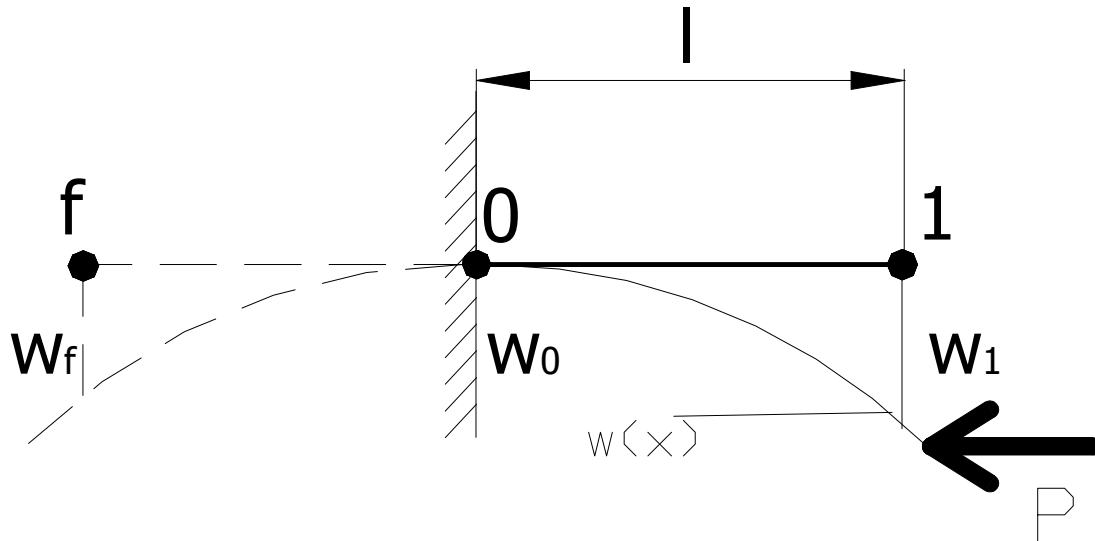
Etap II : rozwiązanie wyższego rzędu :

$$\left\{ \begin{array}{l} Lw_1 = f_1 + \Delta_1 \\ Lw_2 = f_2 + \Delta_2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{-2w_1}{l^2} = \frac{l(7ql - 12R)}{12EJ} \\ \frac{2w_1}{l^2} = \frac{l(17ql - 20R)}{12EJ} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w}_1^{(H)} = \frac{1}{12} \frac{ql^4}{EJ} \\ \mathbf{R} = \frac{3}{4} ql \end{array} \right.$$

Ponownie otrzymano wyniki ściśle. Porównując te wartości z wynikiem z etapu pierwszego można zauważyć lepszą dokładność reakcji w etapie pierwszym niż samego ugięcia. Wartość ugięcia w etapie drugim (czyli wartość ścisła) zmalała dwukrotnie, podczas gdy wartość reakcji zmieniła się „jedynie” o 11%.

Przykład 6.4

Należy rozwiązać przy pomocy *MRS* wyższego rzędu zadanie wyboczenia słupa *Eulera*.



sformułowanie problemu (stateczność zlinearyzowana) :

$$\mathcal{L}(x) = \frac{d^2}{dx^2} w(x) = f(x, w) \quad , f(x, w) = -\frac{M(x, w)}{EJ} \quad 0 \leq x \leq l$$

gdzie :

$$M(x, w) = -P(f - w)$$

$$w(0) = 0 \quad w'(0) = 0$$

wartość ściska siły krytycznej (siła *Eulera*) :

$$P_E = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \approx 2.467 \frac{EJ}{l^2}$$

Etap I : rozwiązanie klasyczną *MRS*

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0' \approx Gw_0 = \frac{w_1 - w_f}{2l} = 0 \Rightarrow w_f = w_1 \\ w_0'' \approx \frac{w_f - 2w_0 + w_1}{l^2} = P \frac{w_1 - w_0}{EJ} \Rightarrow w_1 \left(\frac{2}{l^2} - \frac{P}{EJ} \right) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow P = 2 \frac{EJ}{l^2}$$

$$\epsilon = \left| \frac{P - P_E}{P_E} \right| \times 100\% = 18.9\%$$

Etap II : rozwiązanie *MRS* wyższego rzędu

$$Lw_0 = w_0'' + \frac{1}{12} l^2 w_0'''' = w_0'' + \frac{1}{12} (w_f'' - 2w_0'' + w_1'')$$

$$Lw_0 = w_0'' + \frac{1}{12} (0 - 2w_0'' + 0) = \frac{5}{6} w_0'' = \frac{5}{6} \frac{P(w_1 - w_0)}{EJ}$$

$$\frac{w_f - 2w_0 + w_1}{l^2} = \frac{5}{6} \frac{P}{EJ} w_1$$

$$w_1 \left(\frac{2}{l^2} - \frac{5}{6} \frac{P}{EJ} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} = \frac{12 EJ}{5 l^2} = \mathbf{2.40} \frac{EJ}{l^2} \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \left| \frac{P - P_E}{P_E} \right| \times 100\% = \mathbf{2.70\%}$$

Jak widać, zastosowanie tylko w dziedzinie belek metody *MRS* wyższego rzędu może być dosyć szerokie, wyniki ostateczne są ściśle bądź bliskie ścisłym.

ROZDZIAŁ 7 : PODEJŚCIE *MULTIPOINT*

Jedną z najprostszych technik wyższego rzędu w *MRS* oraz w *BMRS* jest technika polegająca na rozbudowie prawej strony równań różnicowych do kombinacji liniowych znanych wartości funkcji występujących w wyjściowym równaniu różniczkowym w obszarze bądź też na brzegu. Nosi ona nazwę *multipoint* i jest niezwykle skuteczna w przypadku prostych operatorów różniczkowych. Informacje wprowadzone do prawych stron równań różnicowych podnoszą rząd lokalnej aproksymacji, jako że stanowią dodatkowe znane stopnie swobody w węzłach, na których budowany jest operator różnicowy. Z tym, że te nowe stopnie swobody muszą odpowiadać wprost operatorowi różniczkowemu występującemu w obszarze. Ich eliminacja (zastąpienie wartościami funkcji prawej strony) i przeniesienie na stronę prawą rozbudowuje równania różnicowe do postaci kombinacji liniowej wartości węzłowych (strona lewa równań różnicowych) i wartości funkcji prawej strony (strona prawa równań).

Klasyczna kolokacja różnicowa :

$$\mathcal{L}u_i \approx Lu_i = \sum_j \alpha_{ij} u_j = f_i$$

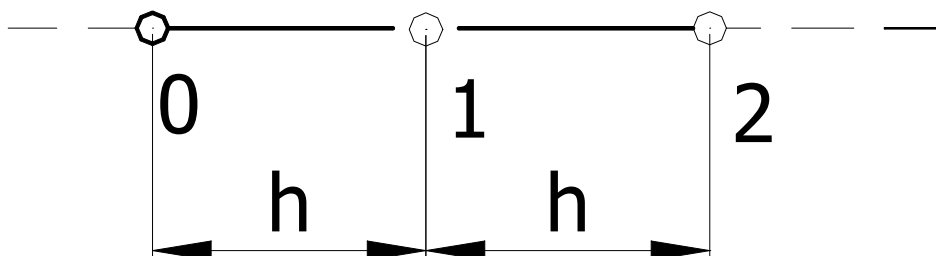
Klasyczna kolokacja *multipoint* :

$$\mathcal{L}u_i \approx Lu_i = \sum_j \alpha_{ij} u_j = \sum_j \beta_{ij} f_j$$

Poszukiwanie współczynników stojących po obu stronach równania może być kłopotliwe, zwłaszcza przy kilku typach operatorów różnicowych (w metodzie bezsiatkowej), zachodzi też konieczność rozwiązywania układu równań tak aby nowy operator był ścisły dla rzędu aproksymacji $2n$. Założenie liniowości operatora różniczkowego w podejściu *multipoint* wymuszone jest przez fakt, iż musi się dać odseparować od siebie współczynniki liczbowe

występujące osobno przy wartościach węzłowych (niewiadome pierwotne) oraz przy wartościach (znanych) funkcji prawej strony.

Przykład 7.1



Klasyczny przykład (Collatz, [6]) na wyprowadzenie formuły *multi-point* dla operatora różnicowego na drugą pochodną zbudowanego na trzech węzłach. Założono czwarty rząd interpolacji wielomianowej, dlatego też dołączono dwa dodatkowe stopnie swobody w węzłach skrajnych, związane z wartością operatora różniczkowego w tych węzłach.

$w''(x) = f(x)$ równanie różniczkowe w obszarze

$w'' \approx Lw_1 = a w_0 + b w_1 + c w_2 + d w_0'' + e w_2''$ założona postać operatora różnicowego

Współczynniki liczbowe a, b, c, d, e zostaną znalezione klasyczną metodą generacji wzorów różnicowych : metodą współczynników nieoznaczonych, bazującą na rozwinięciu każdego współczynnika funkcyjnego operatora w szereg *Taylora* wokół węzła centralnego (1) :

$$w_0 = w_1 - h w_1' + \frac{1}{2} h^2 w_1'' - \frac{1}{6} h^3 w_1''' + \frac{1}{24} h^4 w_1^{IV} + \dots$$

$$w_1 \equiv w_1$$

$$w_2 = w_1 + h w_1' + \frac{1}{2} h^2 w_1'' + \frac{1}{6} h^3 w_1''' + \frac{1}{24} h^4 w_1^{IV} + \dots$$

$$w_0'' = w_1'' - h w_1''' + \frac{1}{2} h^2 w_1^{IV} + \dots$$

$$w_2'' = w_1'' + h w_1''' + \frac{1}{2} h^2 w_1^{IV} + \dots$$

Każde z powyższych rozwinięć wymagało zatrzymania wyrazów aż do czwartego rzędu włącznie; jest to konsekwencją przyjętego rzędu interpolacji (IV). Pięć nieznanymi współczynników wymaga pięciu niezależnych równań algebraicznych. Tworzy się je następująco : mnoży się każde rozwinięcie przez odpowiadający mu współczynnik, tj. pierwsze przez a , drugie przez b itd., a następnie dodaje stronami grupując wyrazy stojące przy odpowiednich pochodnych co prowadzi do poniższej relacji :

$$\begin{aligned}
w_1'' &\approx a w_0 + b w_1 + c w_2 + d w_0'' + e w_2'' = w_1(a + b + c) + w_1'(-ha + hc) + \\
&+ w_1''\left(\frac{1}{2}h^2a + \frac{1}{2}h^2c + d + e\right) + w_1''' \left(-\frac{1}{6}h^3a + \frac{1}{6}h^3c - hd + he\right) + \\
&+ w_1^{IV} \left(\frac{1}{24}h^4a + \frac{1}{24}h^4c + \frac{1}{2}h^2d + \frac{1}{2}h^2e\right)
\end{aligned}$$

Aby zachodziła powyższa równość, współczynniki stojące przy odpowiednich pochodnych po stronie lewej (operator różniczkowy) i prawej (operator różnicowy) muszą być sobie równe. Zapisanie tych równości prowadzi do ostatecznego układu równań algebraicznych :

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ -ha + hc = 0 \\ \frac{1}{2}h^2a + \frac{1}{2}h^2c + d + e = 1 \\ -\frac{1}{6}h^3a + \frac{1}{6}h^3c - hd + he = 0 \\ \frac{1}{24}h^4a + \frac{1}{24}h^4c + \frac{1}{2}h^2d + \frac{1}{2}h^2e = 0 \end{array} \right.$$

Po jego rozwiązaniu otrzymuje się wartości współczynników :

$$a = c = \frac{6}{5} \frac{1}{h^2}$$

$$b = -\frac{12}{5} \frac{1}{h^2}$$

$$d = e = -\frac{1}{10}$$

a operator różnicowy wygląda następująco :

$$w_1'' \approx Lw_1 = \frac{6}{5} \frac{1}{h^2} (w_0 - 2w_1 + w_2) - \frac{1}{10} (w_0'' + w_2'')$$

Kolokację w węźle (1) $Lw_1 = f_1$ można rozpisać, podstawiając jednocześnie :

$$w_0'' = f_0 \quad , \quad w_2'' = f_2 \quad :$$

$$\frac{6}{5} \frac{1}{h^2} (w_0 - 2w_1 + w_2) - \frac{1}{10} (f_0 + f_2) = f_1 \quad ,$$

co prowadzi do ostatecznej formuły *multipoint* dla tego zadania :

$$\frac{1}{h^2} (w_0 - 2w_1 + w_2) = \frac{1}{12} (f_0 + 10f_1 + f_2)$$

Cechy omówionego powyżej klasycznego podejścia *multipoint* są następujące :

- zapewnienie ścisłości wyniku dla założonego rzędu aproksymacji wielomianowej $(2n)$,

- rozbudowa prawej strony równań różnicowych zamiast modyfikacji macierzy współczynników wzorów różnicowych,
- efektywność podejścia jedynie dla prostych liniowych operatorów różnicowych,
- konieczność generacji nowych wzorów różnicowych bazujących na większej liczbie stopni swobody (w tym : konieczność rozwiązywania większych układów równań),
- brak możliwości uwzględnienia nieciągłości rozwiązania w postaci skoków.

Proponowane w pracy, nowe podejście typu *multipoint* opiera się na korekcie wyjściowego operatora różnicowego nie poprzez dokładanie nowych stopni swobody do układu równań (na poziomie generacji wzorów różnicowych), ale poprzez uwzględnienie członów wyższego rzędu tak aby jakość aproksymacji była niezależna od jakości operatora różnicowego. Jako człony wyższego rzędu rozumie się oprócz wartości pochodnych także człony wynikające ze skoków w funkcji lub/i jej pochodnych. Algorytm postępowania pokazany jest poniżej :

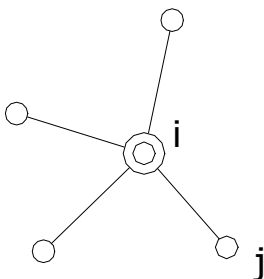
Dany problem brzegowy ($1D, 2D$) :

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{w } \Omega$$

$$\mathcal{G}u = g \quad \text{na } \partial\Omega$$

\mathcal{L}, \mathcal{G} – liniowe operatory różniczkowe (odpowiednio : w obszarze i na jego brzegu)

Cel : należy zapewnić ścisłość wyniku dla aproksymacji wielomianowej rzędu $2n$ do dyskretyzacji liniowych operatorów różnicowych



generacja operatorów różnicowych i ich rozwinięcie w szereg *Taylor*, stąd :

$$\mathcal{L}u_0 = \mathcal{L}u_0 + \Delta_0(\text{człony wyższego rzędu}) + R_0 = f_0 + \Delta_0 + R_0$$

rozwinięcie operatorów różniczkowych w węzłach gwiazdy w szereg *Taylor* :

$$\mathcal{L}u_i = \mathcal{L}u_0 + h_i \mathcal{L}u_0' + \frac{1}{2} h_i^2 \mathcal{L}u_0'' + \frac{1}{6} h_i^3 \mathcal{L}u_0''' + \dots = f_i, \quad i = 1, \dots, m$$

eliminacja pochodnych u_0 wyższego rzędu w celu otrzymania formuły kolokacji *multipoint* :

$$\sum_j \alpha_{ij} u_j = \sum_j \beta_{ij} f_j$$

kombinacja wartości funkcji = kombinacja wartości prawej strony

Tak sformułowane zadanie *multipoint* nie wymaga każdorazowej generacji operatora z uwzględnieniem dodatkowych stopni swobody w węzłach, może być efektywnie użyte w podejściach wyższego rzędu zarówno w problemach *1D* jak i *2D*.

Przykład 7.2

Zadanie poprzednie (z przykładu 7.1) zostanie rozwiązane nowym wariantem metody *multipoint*, gdzie charakterystyczna formuła zostanie wyprowadzona na etapie korekty operatora różnicowego.

$w''(x) = f(x)$ równanie różniczkowe

$w'' \approx Lw_1 = \frac{1}{h^2}(w_0 - 2w_1 + w_2)$ klasyczny operator różnicowy (niski rząd)

Rozwinięcie w szereg operatora różnicowego :

$$Lw_1 = w_1'' + \frac{1}{12}l^2 w_1^{IV} + R_1 = f_1 + \Delta_1$$

Rozwinięcie w szereg operatorów różniczkowych :

$$\mathcal{L}w_0 = w_0'' = w_1'' - l w_1''' + \frac{1}{2}l^2 w_1^{IV} + R_1 = f_0$$

$$\mathcal{L}w_2 = w_2'' = w_1'' + l w_1''' + \frac{1}{2}l^2 w_1^{IV} + R_2 = f_2$$

$$2w_1'' + l^2 w_1^{IV} = 2f_1 + l^2 w_1^{IV} \approx f_0 + f_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} w_1^{IV} = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{l^2} \\ \Delta_1 = \frac{1}{12}(f_0 - 2f_1 + f_2) \end{array}$$

Ostateczna formuła *multipoint* :

$$\frac{1}{l^2}(w_0 - 2w_1 + w_2) = \frac{1}{12}(f_0 + 10f_1 + f_2)$$

jest identyczna z otrzymaną w przykładzie 7.1, a wymagała o wiele mniejszego nakładu obliczeń, zwłaszcza rozwiązywanie dodatkowego dużego układu równań nie było konieczne.

Wzory różnicowe, jak wiadomo, mogą być otrzymywane również na drodze aproksymacji (wyniki mogą się różnić, ale sposób konstrukcji wzorów jest podobny). Tak więc w przypadku, kiedy liczba węzłów gwiazdy jest o wiele większa niż to wymaga rząd ściśłości wielomianowej ($2n$) formuła *multipoint* może być generowana za pomocą techniki aproksymacji *MWLS*. Eliminacja pochodnych wyższego rzędu odbywa się podobnie poprzez rozwijanie w szereg *Taylora* wartości operatorów różniczkowych w węzłach gwiazdy.

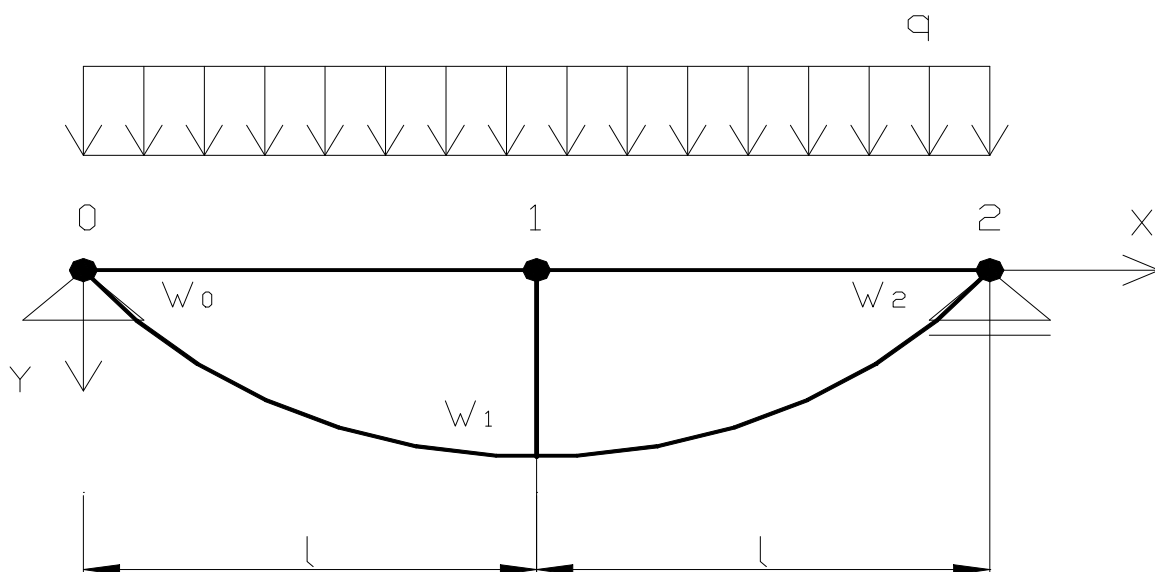
Warto podkreślić, iż :

- podobnie jak w ogólnym sformułowaniu aproksymacji wyższego rzędu pochodne rzędów wyższych niż $2n$ są pomijane podczas gdy pochodne rzędu niższego lub równego $2n$ są zachowane w członie korekcyjnym,
- podczas obliczania pochodnych wyższego rzędu dopuszczalna jest kombinacja podejścia *multipoint*, składania operatorów oraz różniczkowania równania z obszaru,
- mimo iż rozważana była aproksymacja wielomianowa (ściśła dla rozwiązań gładkich) także uwzględniane mogą być nieciągłości dowolnego rzędu poprzez wliczenie odpowiednich członów skoku do rozwinięcia w szereg, tak jak to było pokazane w poprzednich rozdziałach.

Na koniec zostaną przedstawione zadania z dziedziny belek z zastosowaniem podejścia *multipoint* przy korekcie operatora różnicowego.

Przykład 7.3

BELKA SWOBODNIE PODPARTA – PODEJŚCIE *MULTIPOINT*



Sformułowanie zadania :

$$\mathcal{L}(x) = \frac{d^2}{dx^2} w(x) = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad 0 \leq x \leq 2l$$

$$M(x) = \frac{1}{2}qx(2l - x) \quad w(0) = 0 \quad w(2l) = 0$$

Dyskretyzacja operatora :

$$\mathcal{L}w_1 \approx Lw_0 = \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2}$$

Ponieważ jest to jedyny operator różnicowy występujący w zadaniu, można skorzystać z wyników z przykłady 7.2, gdzie wyprowadzona została ostateczna formuła kolokacji *multipoint* dla tego operatora :

$$\frac{1}{l^2}(w_0 - 2w_1 + w_2) = \frac{1}{12}(f_0 + 10f_1 + f_2)$$

Po podstawieniu wartości funkcji f_i otrzymuje się ostateczne rozwiązanie :

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = \frac{1}{2} \frac{ql^2}{EJ}$$

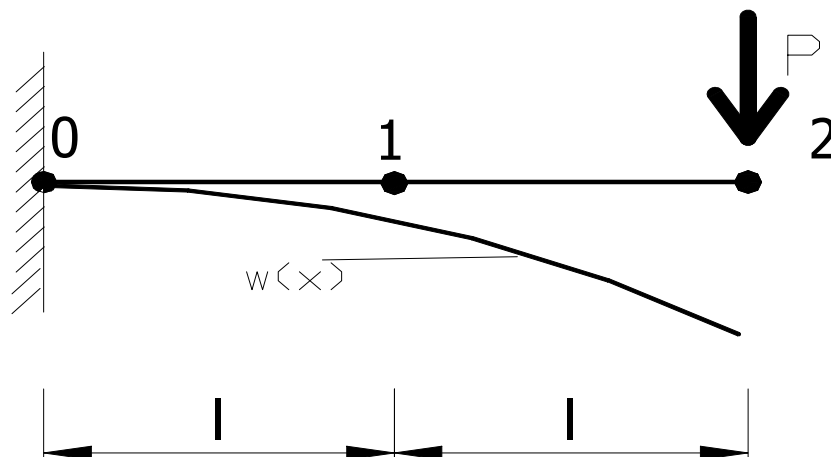
$$f_2 = 0$$

$$\Rightarrow w_1 = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EJ}$$

Jest to ścisły wynik analityczny, sposób jego otrzymania należy porównać ze sposobami rozwiązywania zadań 1.1 – 2.1.

Przykład 7.4

BELKA WSPORNIKOWA – PODEJŚCIE *MULTIPOINT*



Sformułowanie zadania :

$$\mathcal{L}(x) = \frac{d^2}{dx^2} w(x) = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad 0 \leq x \leq 2l$$

$$M(x) = P(x-2l) \quad w(0) = 0 \quad w'(0) = 0$$

Dyskretyzacje różnicowe operatorów (obszar, brzeg) wraz z przypisaną im korektą :

$$\mathcal{L}w_0 = \frac{w_1 - w_0}{l} - \Delta_0 = g_0 \quad , \Delta_0 = \frac{1}{2}lw_0'' + \frac{1}{6}l^2w_0''' + \frac{1}{24}l^3w_0^{IV}$$

$$\mathcal{L}w_1 = \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} - \Delta_1 = f_1 \quad , \Delta_1 = \frac{1}{12}l^2w_1^{IV}$$

Rozwinięcie operatorów różniczkowych w wybranych węzłach obszaru

- względem węzła (0) :

$$\mathcal{L}w_1 = w_1'' = (w_0'' = f_0) + lw_0''' + \frac{1}{2}l^2w_0^{IV} + R_1 = f_1$$

$$\mathcal{L}w_2 = w_2'' = (w_0'' = f_0) + 2lw_0''' + 2l^2w_0^{IV} + R_2 = f_2$$

- względem węzła (1) :

$$\mathcal{L}w_0 = w_0'' = w_1'' - lw_1''' + \frac{1}{2}l^2w_1^{IV} + R_1 = f_0$$

$$\mathcal{L}w_2 = w_2'' = w_1'' + lw_1''' + \frac{1}{2}l^2w_1^{IV} + R_2 = f_2$$

Otrzymane formuły *multipoint* dla pochodnych wyższego rzędu :

$$w_0''' = \frac{1}{2l}(-3f_0 + 4f_1 - f_2)$$

$$w_0^{IV} = \frac{1}{l^2}(f_0 - 2f_1 + f_2)$$

$$w_1^{IV} = \frac{1}{l^2}(f_0 - 2f_1 + f_2)$$

Ostateczne równania i rozwiązanie :

$$\begin{cases} \frac{w_1 - w_0}{l} = \frac{l}{24}(7f_0 + 6f_1 - f_2) \\ \frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = \frac{1}{12}(f_0 + 10f_1 + f_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} w_1 &= \frac{5 \text{ Pl}^3}{6 \text{ EJ}} \\ w_2 &= \frac{8 \text{ Pl}^3}{3 \text{ EJ}} \end{aligned}$$

Uwaga : powyższe zadanie można też rozwiązać w sposób wykorzystujący wprowadzone w poprzednich rozdziałach metody aproksymacji wyższego rzędu na brzegu obszaru. Oznacza to sprowadzenie wszystkich pochodnych wyższego rzędu występujących w korekcie operatora brzegowego do pochodnych wewnątrz obszaru, gdzie ich złożenie ze znanych wartości jest już bardzo proste.

Sprowadzenie pochodnych z brzegu do węzłów z obszaru :

$$w_0^{III} = w_1^{III} - l w_1^{IV} \quad w_0^{IV} = w_1^{IV}$$

Złożenie pochodnych w obszarze :

$$w_1^{III} = (w_1^I)'' = \frac{w_2'' - w_0''}{2l} = \frac{f_2 - f_0}{2l}$$

$$w_1^{IV} = (w_1^{II})'' = \frac{w_0'' - 2w_1'' + w_2''}{l^2} = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{l^2}$$

Formuły *multipoint* dla pochodnych wyższego rzędu :

$$w_0^{III} = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2l} \quad w_0^{IV} = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{l^2}$$

$$w_1^{III} = \frac{f_2 - f_0}{2l} \quad w_1^{IV} = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{l^2}$$

Formuły *multipoint* dla członów korekcyjnych :

$$\Delta_0 = \frac{l}{24} (7f_0 + 6f_1 - f_2)$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{12} (f_0 - 2f_1 + f_2)$$

Formuły *multipoint* dla równań różnicowych :

$$\frac{w_1 - w_0}{l} = g_0 + \frac{l}{24} (7f_0 + 6f_1 - f_2)$$

$$\frac{w_0 - 2w_1 + w_2}{l^2} = \frac{1}{12} (f_0 + 10f_1 + f_2)$$

Celem niniejszego rozdziału jest pokazanie zasad funkcjonowania najstarszego historycznie podejścia wyższego rzędu w MRS, idealnego w prostych problemach brzegowych, gdzie wymagany stopień aproksymacji uzyskiwany jest poprzez wprowadzenie kombinacji liniowej do klasycznej formuły kolokacji różnicowej. Nowe sformułowanie *multipoint* zakłada rozbudowę prawej strony równań różnicowych na etapie korekty operatorów różnicowych przy dowolnej ilości węzłów gwiazdy. Należy również zaznaczyć dogodność sformułowania do celów implementacji komputerowej. W przyszłości warto zwrócić baczniejszą uwagę na ten kierunek analizy.

ROZDZIAŁ 8 :

APROKSYMACJA WYŻSZEGO RZĘDU W WERSJI BEZSIATKOWEJ MRS

Tematyka poprzednich rozdziałów miała na celu wprowadzenie pojęcia aproksymacji wyższego rzędu, podkreślenie jej zalet w sformułowaniach brzegowych a także zasygnalizowanie miejsc występowania najpoważniejszych problemów z nią związanych. Testowanie przedstawionych algorytmów przeprowadzono na szeregu przykładów z dziedziny belek jako jednego z najczęstszych zastosowań *MRS* w zagadnieniach brzegowych *ID*. Jednak w powszechnym użyciu funkcjonuje bezsiatkowa wersja *MRS*, bazująca na dowolnie nieregularnym rozkładzie węzłów. Oznacza to, iż przy wprowadzaniu siatki węzłów do obszaru nie nadaje jej się jakiegokolwiek narzuconej konfiguracji, tak iż mogą one leżeć zupełnie dowolnie. Opracowane podstawy teoretyczne podejścia bezsiatkowej *MRS* (*BMRS*) znaleźć można w [1]. Obecnie należy skupić się na problemie wprowadzenia do algorytmu *BMRS* techniki aproksymacji wyższego rzędu.

Szczególne zastosowanie *BMRS* odnalazła w zadaniach brzegowych dwuwymiarowych (*2D*), natomiast na obecnym etapie pracy techniki wyższego rzędu zostaną przetestowane jedynie na problemach brzegowych *ID*, w celu skonfrontowania z wynikami zadań z poprzednich rozdziałów.

Jednymi z najbardziej charakterystycznych dla *BMRS* punktami algorytmu są generacje siatki węzłów oraz wzorów różnicowych. Podczas generacji siatki węzłów korzysta się z pojęcia gęstości siatki oraz z mechanizmu zwanego generatorem siatki typu *Liszki* [6]. Problem generacji zostanie w pracy pominięty jako niezwiązany bezpośrednio z przedmiotem opracowania. We wszystkich sformułowaniach i dalszych przykładach założono gotową dyskretyzację obszaru. Natomiast generacja wzorów różnicowych odbywa się metodą *MWLS*, produkującą komplet wzorów różnicowych dla pochodnych odpowiadających operatorom różniczkowym występującym w sformułowaniu problemu. Ważną rzeczą jest problem doboru węzłów do gwiazd różnicowych, bowiem w przypadku *BMRS* odrzuca się założenie jednolitej konfiguracji węzłów dla każdej gwiazdy z obszaru, tak jak to było w klasycznej *MRS*. Różne typy gwiazd różnicowych wynikają z niejednolitego rozkładu węzłów, zwłaszcza w okolicach brzegu obszaru. Do przypisania węzłom gwiazd służą rozmaite kryteria, najczęściej są nimi kryterium krzyża lub kryterium sąsiadów *Voronoi*.

W przypadku zadań brzegowych *ID* obowiązujące przy doborze węzłów do gwiazd będzie kryterium związane z położeniem danego węzła. Należy wyróżnić trzy rodzaje stref

dla siatki węzłów ID : skrajna, przedskrajna oraz środkowa. Od razu trzeba też zaznaczyć, iż generacja wzorów różnicowych dotyczyć będzie **wszystkich** węzłów, zarówno z obszaru jak i brzegowych. Ma to na celu całkowicie uniezależnić proponowane podejście od wymogu istnienia znanych wartości ścisłych funkcji bądź jej pochodnych np. na brzegu. Mimo, iż kolokacja w sformułowaniu lokalnym problemu odbywa się zazwyczaj w węzłach obszaru to znajomość wartości pochodnych niskiego rzędu jest niezbędna do późniejszych obliczeń pochodnych wyższego rzędu z obszaru.

Niech dany będzie problem brzegowy poprzez sformułowanie lokalne :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}w &= f & \text{w } \Omega \\ \mathcal{B}w &= g & \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

co dla zadań z dziedziny belek może wyglądać następująco :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} w(x) &= -\frac{M(x)}{EJ} & \text{dla } x \in (0, L) \\ w(x_I) &= w_I & w(x_{II}) = w_{II} & w_I, w_{II} \in (0, L) \end{aligned}$$

Dyskretyzacja różnicowa obszaru i warunków brzegowych : wprowadzenie węzłów do obszaru (dowolne odstęp), numeracja, dyskretyzacja warunków brzegowych.

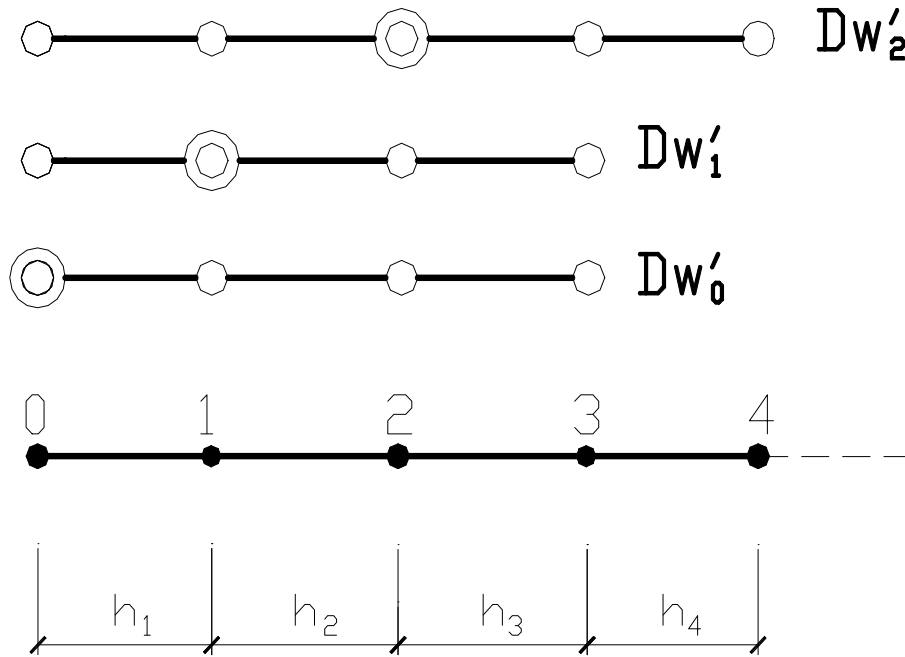
W zadaniach ID zakłada się stopień lokalnej aproksymacji $p = 2$. Pochodne wyższego rzędu należy złożyć wykorzystując schematy różnicowe wygenerowane za pomocą $MWLS$. Proponowana klasyfikacja węzłów do gwiazd różnicowych zakłada maksymalnie dwa węzły z każdej strony węzła centralnego aby uniknąć „rozchwiania” operatora w jednym z kierunków.

Generacja kompletu wzorów różnicowych (w_i^I, w_i^{II})

1. Kryteria przynależności węzłów do gwiazd :

- strefa skrajna (4 węzły)
- strefa przedskrajna (4 węzły)
- strefa środkowa (5 węzłów)

Sposób przypisania węzłów do gwiazd różnicowych obrazuje poniższy rysunek :



2. Aproksymacja MWLS

a) strefa skrajna

$$P = \begin{bmatrix} 1 & h_1 & \frac{1}{2}h_1^2 \\ 1 & h_1 + h_2 & \frac{1}{2}(h_1 + h_2)^2 \\ 1 & h_1 + h_2 + h_3 & \frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3)^2 \end{bmatrix} \quad \text{macierz interpolantów}$$

$$W = \text{diag}\left(\frac{1}{(h_1)^3}, \frac{1}{(h_1 + h_2)^3}, \frac{1}{(h_1 + h_2 + h_3)^3}\right) \quad \text{macierz wagowa (diagonalna)}$$

$$B = (P^T W^2 P)^{-1} P^T W^2 \quad \text{macierz wzorów różnicowych}$$

$$Dw' = Bw \quad \text{komplet przybliżonych wartości pochodnych (dla belek : } Dw' = \{w', w''\})$$

operatory różnicowe dla belek :

$$w_0' \approx \sum_{i=0}^3 \alpha_i w_i = \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$$

$$w_0'' \approx Lw_0 = \sum_{i=0}^3 \beta_i w_i = \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$$

b) strefa przedskrajna

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -h_1 & \frac{1}{2}h_1^2 \\ 1 & h_2 & \frac{1}{2}h_2^2 \\ 1 & h_2 + h_3 & \frac{1}{2}(h_2 + h_3)^2 \end{bmatrix}$$

$$W = \text{diag}\left(\frac{1}{(-h_1)^3}, \frac{1}{(h_2)^3}, \frac{1}{(h_2 + h_3)^3}\right)$$

$$B = (P'W^2P)^{-1}P'W^2$$

$$Dw' = Bw$$

operatory różnicowe dla belek :

$$w_1^I \approx \sum_{i=0}^3 \alpha_i w_i = \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3$$

$$w_1^{II} \approx Lw_1 = \sum_{i=0}^3 \beta_i w_i = \beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3$$

c) strefa środkowa

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -h_{i-2} - h_{i-1} & \frac{1}{2}(h_{i-1} + h_{i-2})^2 \\ 1 & -h_{i-1} & \frac{1}{2}h_{i-1}^2 \\ 1 & h_{i+1} & \frac{1}{2}h_{i+1}^2 \\ 1 & h_{i+1} + h_{i+2} & \frac{1}{2}(h_{i+1} + h_{i+2})^2 \end{bmatrix}$$

$$W = \text{diag}\left(\frac{1}{(-h_{i-1} - h_{i-2})^3}, \frac{1}{(-h_{i-1})^3}, \frac{1}{(h_{i+1})^3}, \frac{1}{(h_{i+1} + h_{i+2})^3}\right)$$

$$B = (P'W^2P)^{-1}P'W^2$$

$$Dw' = Bw$$

operatory różnicowe dla belek :

$$w_i'' \approx \sum_{j=0}^4 \alpha_j w_j = \alpha_{i-2} w_{i-2} + \alpha_{i-1} w_{i-1} + \alpha_i w_i + \alpha_{i+1} w_{i+1} + \alpha_{i+2} w_{i+2}$$

$$w_i'' \approx Lw_i = \sum_{j=0}^4 \beta_j w_j = \beta_{i-2} w_{i-2} + \beta_{i-1} w_{i-1} + \beta_i w_i + \beta_{i+1} w_{i+1} + \beta_{i+2} w_{i+2}$$

I etap rozwiązania : rozwiązanie różnicowe niskiego rzędu ($p = 2$)

$$Lw_i = f_i \quad i = 0, \dots, n \quad \text{dla belek : } \sum_{j=0}^m \beta_{ij} w_j = f_i \quad i = 0, \dots, n$$

+ uwzględnienie warunków podparcia daje rozwiązanie niskiego rzędu $\mathbf{w}_i^{(L)}$

Obliczenie poprawek wyższego rzędu

$$w_i^I \approx \sum_{j=0}^m \alpha_j w_j \quad i = 0, \dots, n \quad m = 3, 4, 5 \quad (\text{ilość węzłów gwiazdy różnicowej})$$

$$w_i'' \approx \sum_{j=0}^m \beta_j w_j$$

rozwiniecie w szereg *Taylora* wyrazów w_0, w_1, \dots, w_m gwiazdy do wyrazu $2p = 4$ włącznie

$$Lw_i = \mathcal{L}w_i + \Delta_i + R \quad \text{dla belek} \quad L^{(I)}w_i = w_i^I + \Delta_i^{(I)} + R \quad L^{(II)}w_i = w_i'' + \Delta_i^{(II)} + R$$

Δ_i - człon korekcyjny (wyrazy rzędu III i IV oraz wyrazy skoku)

R - reszta (błąd obcięcia wyrazów szeregu *Taylora*)

dla belek znana jest ogólna postać członu korekcyjnego :

$$\Delta_i = \Delta_i(h, w_i^{III}, w_i^{IV}, J_i^{(1)}, J_i^{(2)}, J_i^{(3)}, J_i^{(4)})$$

pochodne wyższych rzędów – obliczanie tylko poprzez składanie operatorów :

$$w_i^{III} = \begin{cases} (w_i^I)'' = \sum_{j=0}^m \alpha_j w_j'' \\ (w_i'')^I = \sum_{j=0}^m \beta_j w_j^I \end{cases}$$

$$w_i^{IV} = (w_i'')'' = \sum_{j=0}^m \beta_j w_j''$$

wyrazu skoków :

$$J_i^{(0)} = \Delta w \rightarrow \text{skok funkcji ugięcia belki}$$

$$J_i^{(1)} = \Delta \gamma \rightarrow \text{nieciągłość kąta ugięcia (różnica kątów w przegubie)}$$

$$J_i^{(2)} = \frac{M_i}{EJ} \rightarrow \text{skok momentu zginającego}$$

$$J_i^{(3)} = \frac{Q_i}{EJ} \rightarrow \text{skok siły poprzecznej}$$

$$J_i^{(4)} = \frac{q_i}{EJ} \rightarrow \text{skok obciążenia ciągłego}$$

ostateczna postać członu korekcyjnego :

$$\Delta_i = \Delta_i(h, \sum_{j=0}^m \beta_j w_j^I, \sum_{j=0}^m \alpha_j w_j^{II}, \Delta\gamma, M_i, Q_i, q_i, EJ)$$

Ponieważ na tym etapie zadania wszystkie poprawki wyższych rzędów liczone były jedynie przy pomocy wartości pochodnych niższych rzędów uzyskanych po rozwiązaniu etapu **I** zadania, to należy liczyć się z faktem, iż nie są to wartości ściśle czyli odpowiadające temu rzędowi aproksymacji. Aby przybliżyć się do wymaganych wartości, należy wprowadzić procedurę iteracyjną polegającą na cyklicznym poprawianiu wartości pochodnych wszystkich rzędów (*I*, *II*, *III*, *IV*) na podstawie wartości członów korekcyjnych obliczonych w poprzednim etapie iteracji. Jako wartości wstępne przyjmuje się wartości z pierwszego etapu obliczeń.

Algorytm procedury iteracyjnej (dokładne liczenie pochodnych)

Punkt startowy procedury ($k=0$) :

1. rozwiązanie niskiego rzędu : $w_i^{(L)}$
2. wartości pochodnych niskich rzędów : $(w_i^I)^{(0)} = w_i^I(w_i^{(L)})$ $(w_i^{II})^{(0)} = w_i^{II}(w_i^{(L)})$
3. wartości pochodnych wyższych rzędów : $(w_i^{III})^{(0)} = w_i^{III}(w_i^{(L)})$ $(w_i^{IV})^{(0)} = w_i^{IV}(w_i^{(L)})$
4. wartości członów korekcyjnych : $(\Delta_i^{(I)})^{(0)} = \Delta_i^I(w_i^{(L)})$ $(\Delta_i^{(II)})^{(0)} = \Delta_i^{II}(w_i^{(L)})$

Postać k -tego cyklu iteracyjnego ($k = 1, 2, \dots$) :

1. k -te wartości pochodnych niskich rzędów :

$$(w_i^I)^{(k)} = (w_i^I)^{(k-1)} - (\Delta_i^{(I)})^{(k-1)}$$

$$(w_i^{II})^{(k)} = (w_i^{II})^{(k-1)} - (\Delta_i^{(II)})^{(k-1)}$$

2. k -te wartości pochodnych wyższych rzędów :

$$(w_i^{III})^{(k)} = [(w_i^{II})^{(k)}]^I \quad \text{lub} \quad (w_i^{III})^{(k)} = [(w_i^I)^{(k)}]^{II}$$

$$(w_i^{IV})^{(k)} = [(w_i^{II})^{(k)}]^{II}$$

3. k -te wartości członów korekcyjnych :

$$(\Delta_i^{(I)})^{(k)} = \Delta_i^I[(w_i^{III})^{(k)}, (w_i^{IV})^{(k)}]$$

$$(\Delta_i^{(II)})^{(k)} = \Delta_i^{(II)} [(w_i^{III})^{(k)}, (w_i^{IV})^{(k)}]$$

Kryteria przerywania iteracji : kontrola zbieżności wyników

tempa zbieżności dla poszczególnych pochodnych oznaczone zostaną jako :

$$\varepsilon_i^I = \left| \frac{(w_i^I)^{(k-1)} - (w_i^I)^{(k)}}{(w_i^I)^{(k)}} \right| \quad \text{dokładność dla pierwszej pochodnej } w_i^I$$

$$\varepsilon_i^{II} = \left| \frac{(w_i^{II})^{(k-1)} - (w_i^{II})^{(k)}}{(w_i^{II})^{(k)}} \right| \quad \text{dokładność dla drugiej pochodnej } w_i^{II}$$

$$\varepsilon_i^{III} = \left| \frac{(w_i^{III})^{(k-1)} - (w_i^{III})^{(k)}}{(w_i^{III})^{(k)}} \right| \quad \text{dokładność dla trzeciej pochodnej } w_i^{III}$$

$$\varepsilon_i^{IV} = \left| \frac{(w_i^{IV})^{(k-1)} - (w_i^{IV})^{(k)}}{(w_i^{IV})^{(k)}} \right| \quad \text{dokładność dla czwartej pochodnej } w_i^{IV}$$

natomiast dane z góry dokładności dla powyższych pochodnych jako ε_{dop}^k , gdzie $k = I, II, III, IV, i = 0, \dots, n$.

warunek przerywania iteracji : $\varepsilon_i^k < \varepsilon_{dop}^k$

II etap zadania : rozwiązanie wyższego rzędu

ostateczny układ równań różnicowych :

$$Lw_i = f_i + \Delta_i \quad i = 0..n$$

+ uwzględnienie warunków podparcia daje rozwiązanie niskiego rzędu $\mathbf{w}_i^{(H)}$

Ostateczny wynik różnicowy jest ścisły w ramach założonego rzędu aproksymacji o ile przeprowadzona została procedura iteracyjna w celu jak najdokładniejszego obliczenia wartości pochodnych rozwiązania : zarówno niskiego jak i wyższego rzędu. Iteracje w punktu widzenia implementacji komputerowej nie są uciążliwe gdyż nie wymagają rozwiązywania układu równań algebraicznych a jedynie naprzemiennego obliczania wartości pochodnych i członów korekcyjnych. Zastosowanie składania operatorów w obszarze oraz procedury iteracyjnej pozwoliło na całkowite uniezależnienie się od zapisywania dodatkowych równań w obszarze (np. na węzłach brzegowych) oraz na jego brzegu, ale niewątpliwie wydłużyło czas obliczeń. Jednak jest to duże udogodnienie w punktu widzenia algorytmizacji i automatyzacji całego procesu.

Podsumowując powyższy rozdział warto wynotować podstawowe różnice pomiędzy wersją klasyczną *MRS*, a jej wersją bezsiatkową *BMRS* :

- brak wymogu regularności siatki; węzły, w dowolnej liczbie, mogą być dowolnie rozłożone w obszarze i na jego brzegu (co w przypadku ID oznacza brak stałego modułu siatki h),
- generacja kompletu wzorów różnicowych w każdym węźle (zarówno obszaru jak i jego brzegu) za pomocą techniki aproksymacji $MWLS$,
- uniezależnienie się od dodatkowych warunków brzegowych, pomagających obliczać pochodne funkcji na brzegu w MRS ; wprowadzenie na brzegu dodatkowej aproksymacji pozwalającej oszacować wartości określonych tam pochodnych a następnie je poprawiać w wyniku działania procedury iteracyjnej.

Rozdział niniejszy nie rozstrzyga oczywiście wszystkich zagadnień związanych z BMRS w dziedzinie zadań 1D. Jest jedynie próbą zarysowania ogólnego algorytmu postępowania w przypadku, gdy wymagana jest pełna automatyzacja podejścia aproksymacji wyższego rzędu.

Poniższy przykład prezentuje w bardzo wyczerpujący sposób rozwiązanie zadania ugięcia belki swobodnie podpartej wersją bezsiatkową MRS z użyciem algorytmu pokazanego powyżej. Wszystkie obliczenia prowadzone były komputerowo z wykorzystaniem prototypu programu opracowanego przez autora pracy. Zadanie rozwiązywane było w chwili, gdy funkcjonowało jeszcze kryterium przydziału 3 węzłów operatorom różnicowym brzegowym, wbrew temu, co podane było w ogólnym algorytmie. Dla największej prostoty zadania wprowadzono siatkę o regularnych rozstawach węzłów; wzory różnicowe były generowane metodą $MWLS$, zastosowano proces iteracyjny w celu dokładnego obliczenia wartości pochodnych funkcji ugięcia.

Przykład 8.1

Należy rozwiązać belkę swobodnie podpartą pod obciążeniem ciągłym q posługując się wersją bezsiatkową MRS . Wartości pochodnych powinny ustabilizować się na poziomie dokładności $\varepsilon = 0.00001$.

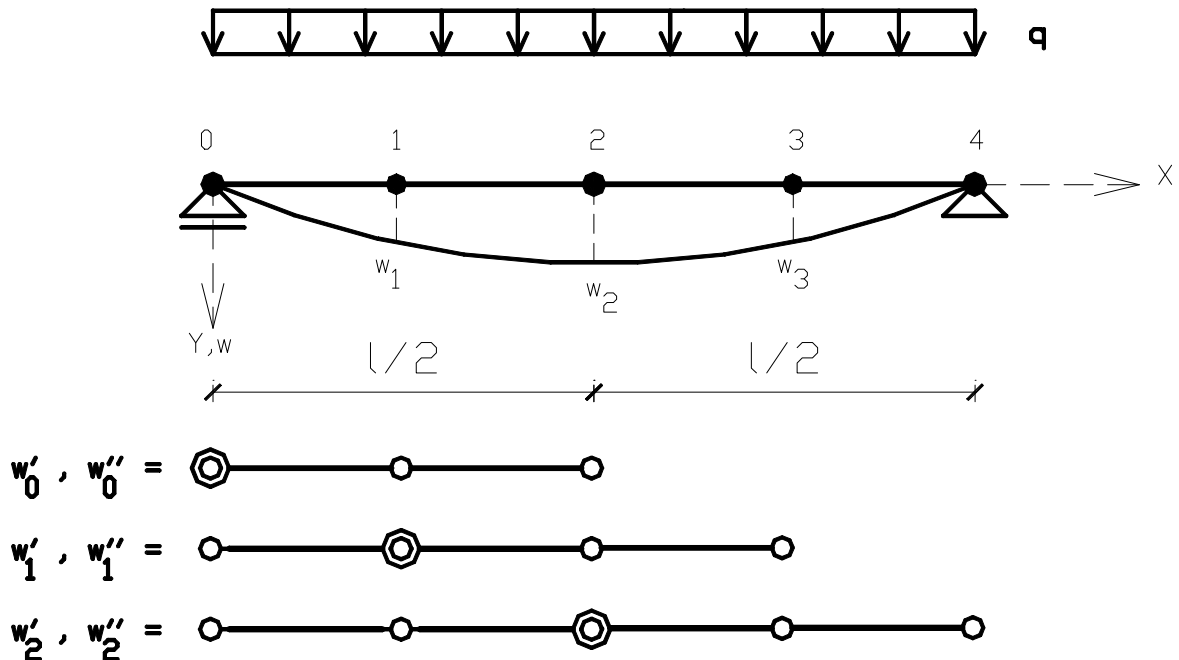
Przypomnienie sformułowania zadania :

$$\mathcal{L}(x) = \frac{d^2}{dx^2} w(x) = f(x) \quad f(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \quad 0 \leq x \leq 2l$$

$$M(x) = \frac{1}{2}qx(2l-x) \quad w(0) = 0 \quad w(2l) = 0$$

Na belce prowadzono pięć węzłów w równych rozstawach h . Dzięki symetrii zadania liczba niewiadomych ugięć redukuje się do dwóch. Na rysunku poniżej pokazano dyskretyzację

wraz z selekcją węzłów do gwiazd różnicowych odpowiadających kompletowi wzorów różnicowych (w_i^I, w_i^{II} , $i = 0, \dots, 2$) w każdym węźle połówki belki.



Odpowiadające tej klasyfikacji wzory różnicowe są następujące :

- węzeł (0) :

$$\begin{bmatrix} w_0^I l \\ w_0^{II} l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.0000 & 4.0000 & -1.0000 \\ 4.0000 & -8.0000 & 4.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

- węzeł (1) :

$$\begin{bmatrix} w_1^I l \\ w_1^{II} l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0270 & 0.0811 & 0.9189 & 0.2070 \\ 3.7838 & -7.3513 & 3.3513 & 0.2162 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

- węzeł (2) :

$$\begin{bmatrix} w_2^I l \\ w_2^{II} l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0294 & -0.9412 & 0.0 & 0.9412 & 0.0294 \\ 0.2 & 3.2 & -6.8 & 3.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

Następnie przyjęto oznaczenia : $Lw_0 \approx w_0''$ $Lw_1 \approx w_1''$ $Lw_2 \approx w_2''$

Rozwiązanie I etapu :

Kolokacja różnicowa :

$$\begin{cases} Lw_0 = f_0 \\ Lw_1 = f_1 \\ Lw_2 = f_2 \end{cases}$$

Komplet równań różnicowych wygląda po dokonaniu agregacji oraz po uwzględnieniu warunków symetrii : $w_3 = w_1$, $w_4 = w_0$ następująco :

$$\frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 3.7838 & -7.1351 & 3.3513 \\ 0.2 & 6.4 & -6.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \frac{ql^2}{EJ} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Po uwzględnieniu warunku podparcia : $w_0 = 0$ otrzymuje się rozwiązania I etapu :

$$\begin{cases} w_0^{(L)} = 0 \\ w_1^{(L)} = 0.1561 \frac{ql^4}{EJ} \\ w_2^{(L)} = 0.2204 \frac{ql^4}{EJ} \end{cases}$$

Obliczanie poprawek operatorów :

Na podstawie rozwiązania z poprzedniego etapu zadania tworzy się komplet wartości pochodnych niskich rzędów wygenerowanych na początku zadania. Są one jednocześnie punktem startowym dla pierwszej iteracji :

$$\begin{aligned} (w_0^I)^{(0)} = (w_0^I)^{(L)} &= 0.4040 \frac{ql^3}{EJ} & (w_0^{II})^{(0)} = (w_0^{II})^{(L)} &= -0.3670 \frac{ql^2}{EJ} \\ (w_1^I)^{(0)} = (w_1^I)^{(L)} &= 0.2194 \frac{ql^3}{EJ} & (w_1^{II})^{(0)} = (w_1^{II})^{(L)} &= -0.3750 \frac{ql^2}{EJ} \\ (w_2^I)^{(0)} = (w_2^I)^{(L)} &= 0 & (w_2^{II})^{(0)} = (w_2^{II})^{(L)} &= -0.50 \frac{ql^2}{EJ} \end{aligned}$$

Po rozwinięciu w szereg *Taylora* każdego z tych operatorów i sformułowaniu przepisu na osobne człony korekcyjne otrzymuje się wyrażenia dla członów wyższego rzędu :

$$\begin{aligned}
(w_0^{III})^{(0)} &= ((w_0^{II})^{(0)})' = 0.0942 \frac{ql}{EJ} & (w_0^{IV})^{(0)} &= ((w_0^{II})^{(0)})'' = -0.4681 \frac{q}{EJ} \\
(w_1^{III})^{(0)} &= ((w_1^{II})^{(0)})' = -0.1217 \frac{ql}{EJ} & (w_1^{IV})^{(0)} &= ((w_1^{II})^{(0)})'' = -0.3887 \frac{q}{EJ} \\
(w_2^{III})^{(0)} &= ((w_2^{II})^{(0)})' = 0.0 & (w_2^{IV})^{(0)} &= ((w_2^{II})^{(0)})'' = 0.8532 \frac{q}{EJ}
\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, iż ich wartości są dalekie od doskonałych (tj. ścisłych analitycznych, jakich można spodziewać się po założonym rzędzie aproksymacji). Jeżeli w tym miejscu rozwiązano by układ równań z etapu **II** posługując się wyżej określonymi poprawkami, to również same wartości węzłowe funkcji ugięcia byłyby niedokładne.

W tym celu zastosowano proces iteracyjny startujący z wielkości podanych wyżej. Dla osiągnięcia wymaganej dokładności przeprowadzono $j = 134$ cykle iteracji wewnętrznych.

Ostateczny komplet wartości pochodnych wygląda następująco :

$$\begin{aligned}
w_0^I &= 0.3204 \frac{ql^3}{EJ} & w_0^{II} &= -0.0668 \frac{ql^2}{EJ} & w_0^{III} &= -1.1819 \frac{ql}{EJ} & w_0^{IV} &= 1.1818 \frac{q}{EJ} \\
w_1^I &= 0.2309 \frac{ql^3}{EJ} & w_1^{II} &= -0.3750 \frac{ql^2}{EJ} & w_1^{III} &= -0.5910 \frac{ql}{EJ} & w_1^{IV} &= 1.1819 \frac{q}{EJ} \\
w_2^I &= \mathbf{0.0} & w_2^{II} &= \mathbf{-0.50} \frac{ql^2}{EJ} & w_2^{III} &= \mathbf{0.0} & w_2^{IV} &= \mathbf{1.1821} \frac{q}{EJ}
\end{aligned}$$

Przykładowo podano wartości ścisłe dla pochodnych w węźle środkowym (2) :

$$(w_2^I)_{\text{anal}} = \mathbf{0.3333} \frac{ql^3}{EJ} \quad (w_2^{II})_{\text{anal}} = \mathbf{-0.50} \frac{ql^2}{EJ} \quad (w_2^{III})_{\text{anal}} = \mathbf{0} \quad (w_2^{IV})_{\text{anal}} = \frac{q}{EJ}$$

oraz poprawki końcowe dla operatora różnicowego na drugą pochodną :

$$\Delta_0 = -0.4186 \frac{ql^2}{EJ} \quad \Delta_1 = 0.0166 \frac{ql^2}{EJ} \quad \Delta_2 = 0.0394 \frac{ql^2}{EJ}$$

Rozwiązanie II etapu :

Ostateczny układ równań :

$$\frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 3.7838 & -7.1351 & 3.3513 \\ 0.2 & 6.4 & -6.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = -\frac{ql^2}{EJ} \begin{bmatrix} 0.4186 \\ 0.3584 \\ 0.4606 \end{bmatrix}$$

daje następujące rozwiązania wyższego rzędu :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w}_0^{(H)} = \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_1^{(H)} = 0.1470 \frac{ql^4}{EJ} \\ \mathbf{w}_2^{(H)} = 0.2061 \frac{ql^4}{EJ} \end{array} \right.$$

Ich ściśle odpowiedniki analityczne wynoszą :

$$(\mathbf{w}_0)_{\text{anal}} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{w}_1)_{\text{anal}} = 0.1484 \frac{ql^4}{EJ} \quad (\mathbf{w}_2)_{\text{anal}} = 0.2083 \frac{ql^4}{EJ}$$

Dokładności wyników nie są doskonałe, ale satysfakcjonujące. W celu podniesienia precyzji obliczeń lub redukcji liczby iteracji można stosować np. techniki relaksacyjne.

Mimo iż powyższe zadanie to jedno z najprostszych zadań testowych w analizie dyskretnej belek, to jego rozwiązanie różnicowe techniką aproksymacji wyższego rzędu w wersji bezsiatkowej pokazuje siłę rozważanego podejścia, tkwiącą w nieustannym poprawianiu operatorów różnicowych, tak aby wynik końcowy był całkowicie niezależny od ich jakości. Wersja bezsiatkowa ma „jedynie” za zadanie uogólnić podejście na zupełnie dowolny problem brzegowy, co zostanie efektywnie wykorzystane przy sformułowaniu podejścia w dziedzinie problemów brzegowych 2D.

ROZDZIAŁ 9 :

ROZWINIĘCIE 2D PODEJŚCIA WYŻSZEGO RZĘDU

Większość poważnych zadań brzegowych to zadania dwuwymiarowe (lub nawet trójwymiarowe). Dopiero tam na wartości zyskują wszystkie metody dyskretne, w tym także *BMRS*. Szereg testów, jakie muszą być wykonane aby przetestować daną metodę pokaże w jakim stopniu ta metoda oddaje analityczną postać rozwiązania zadania, o ile ona istnieje lub też częściej służy do porównania wyników z innymi metodami dyskretnymi. W rozdziale będzie mowa o ogólnym sformułowaniu techniki aproksymacji wyższego rzędu w dziedzinie 2D. Sposób algorytmizacji jest identyczny jak ten zaprezentowany w rozdziałach dotyczących zadań 1D, z tym że podejście klasyczne *MRS* przestaje być efektywne. Najpoważniejszym powodem jest ograniczenie *MRS* płynące z wymogu regularności siatki węzłów, którą ciężko na ogół dopasować do obszarów o nieregularnym kształcie brzegów. Dlatego też wersja bezsiatkowa wydaje się być jedynym słusznym narzędziem w analizie problemów brzegowych 2D.

Pokazane zostaną oddzielnie sformułowania aproksymacji wyższego rzędu *BMRS* dla operatorów z obszaru i operatorów brzegowych. W obydwu algorytmach założono z góry gotową już wygenerowaną siatkę węzłów oraz opisaną topologię układu (podział na wielokąty *Voronoi*, triangulacja *Delaunay*, klasyfikacja gwiazd różnicowych) – procesy sterujące tymi etapami analizy różnicowej są opisane wyczerpująco w [1]. Skupiono się na generacji wzorów różnicowych oraz na ich korekcie – zachowaniu członów wyższego rzędu.

Sformułowanie 2D dla operatorów z obszaru :

Sformułowanie problemu brzegowego :

$$\mathcal{L}u(x, y) = f(x, y) \quad \text{w obszarze } \Omega$$

$$\mathcal{G}u(x, y) = g(x, y) \quad \text{na brzegu obszaru } \partial\Omega$$

Niezależnie od postaci operatorów różniczkowych \mathcal{L} oraz \mathcal{G} techniką aproksymacji *MWLS* generuje się komplet wzorów różnicowych do określonego rzędu n . Generacje odbywa się w węźle centralnym (0) o współrzędnych $u(x_0, y_0) = u_0$. Wprowadza się następujące oznaczenia :

- $u(x_i, y_i) = u_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$ dane wartości funkcji $u(x, y)$ w węzłach obszaru (N – liczba węzłów),
- $\mathbf{q} = [u_1, \dots, u_m]$ wektor wartości węzłowych (m – liczba węzłów gwiazdy różnicowej),

$$\bullet \quad P = \begin{bmatrix} 1 & h_1 & k_1 & \frac{1}{2}h_1^2 & h_1k_1 & \frac{1}{2}h_1^2 & \dots & \frac{1}{n!}k_1^n \\ 1 & h_2 & k_2 & \frac{1}{2}h_2^2 & h_2k_2 & \frac{1}{2}h_2^2 & \dots & \frac{1}{n!}k_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & h_m & k_m & \frac{1}{2}h_m^2 & h_mk_m & \frac{1}{2}h_m^2 & \dots & \frac{1}{n!}k_m^n \end{bmatrix} \quad \text{macierz lokalnych interpolantów}$$

$$h = x - x_0 \quad , \quad k = y - y_0 \quad ,$$

$$\bullet \quad W = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & w_m \end{bmatrix} \quad \text{diagonalna macierz wagowa,}$$

$$\bullet \quad B = \begin{cases} (P^t W^2 P)^{-1} P^t W^2 & \text{dla } m > \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \\ P^{-1} & \text{dla } m = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{cases} \quad \text{macierz wzorów różnicowych}$$

$$\bullet \quad Du' = Bq \quad \text{komplet pochodnych aproksymowanych}$$

- $Du = Bq + e$ komplet ścisłych pochodnych (e – błąd aproksymacji różnicowej).

Po otrzymaniu wzorów różnicowych należy stworzyć za ich pomocą wszystkie operatory różnicowe odpowiadające operatorom różniczkowym występującym w sformułowaniu problemu. Następnie buduje się (kolokacja) i rozwiązuje układ równań różnicowych – co daje w rezultacie rozwiązanie niskiego rzędu $u^{(L)}$.

Jego znajomość pozwala na obliczenie wstępnych wartości kompletu pochodnych niskiego rzędu :

$$(Du')^{(L)} = D'u^{(L)}.$$

a rozwinięcie w szereg *Taylor*a wyrażenia Du' pozwala określić postać poprawki wyższego rzędu :

$$Du' = Du + e = Du + \Delta + R.$$

Δ to macierz członów korekcyjnych skupiająca wyrazy wyższego rzędu (pochodne, skoki), dla których aproksymacja różnicowa jest rzędu $2n$, natomiast R to błędy obcięcia wyrazów rzędu wyższego niż $2n$.

Na podstawie znajomości powyższych wielkości oblicza się wartości członów wyższego rzędu (pochodne wyższych rzędów dostaje się w wyniku składania operatorów różnicowych). Symbolicznie zapisać można :

$$Du' = D(u^I, u^{II}) \text{ pochodne niskich rzędów,}$$

$\Delta = \Delta(J^{(p)}, u^{III}, u^{IV})$ wyrazy wyższych rzędów ($p = 0, \dots, 4$ – wartości skoków mogą mieć inną interpretację niż w przypadku statyki belek).

$$\begin{aligned} u^{III} &= (u^{II})^I \quad \text{lub} \quad u^{III} = (u^I)^{II} \\ u^{IV} &= (u^{II})^{II} \end{aligned},$$

gdzie $u^I, u^{II}, u^{III}, u^{IV}$ stanowią komplet wartości pochodnych cząstkowych $\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$ (razem 14 wartości).

Pierwsze oszacowanie członu korekcyjnego :

$$\Delta^{(L)} = \Delta((Du')^{(L)}) = \Delta(u^{(L)})$$

W wyniku procesu iteracyjnego ($k = 1, 2, 3, \dots$) :

$$(Du')^{(k)} = (Du')^{(k-1)} - \Delta^{(k-1)}$$

$$(u^{III})^{(k)} = u^{III}((Du')^{(k)}) \quad (u^{IV})^{(k)} = u^{IV}((Du')^{(k)})$$

$$\Delta^{(k)} = \Delta(J^{(p)}, (u^{III})^{(k)}, (u^{IV})^{(k)}),$$

dla którego wartości startowe pochodzą z pierwszego etapu obliczeń ($k = 0 \rightarrow (L)$), otrzymuje się przy danych dokładnościach ostateczne wartości kompletu pochodnych (niski i wyższy rząd). Rozwiązując ten sam układ równań co w I etapie obliczeń (ale ze zmodyfikowaną prawą stroną) otrzymuje się ostatecznie rozwiązanie wyższego rzędu : $u^{(H)}$. Podstawowym utrudnieniem będzie obliczanie dużego zbioru wartości pochodnych (zwłaszcza w porównaniu z zadaniami *ID*, gdzie liczba wszystkich pochodnych wynosiła 4). Zachowanie struktury bezsiatkowej sformułowania pozwoli w przyszłości całkowicie zautomatyzować przedstawiony algorytm aproksymacji wyższego rzędu *BMRS* w zadaniach *2D*.

Sformułowanie 2D dla operatorów brzegowych :

Dla skupienia uwagi operatory różniczkowe w obszarze i na brzegu będą miały określone z góry postacie tak jak to było w przypadku *ID* w rozdziale 5. Zapisane w węzle brzegowym (patrz : rysunek) wyglądają następująco :

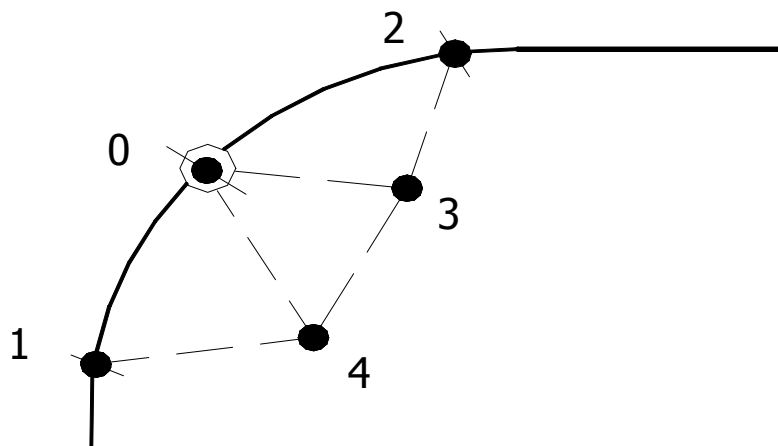
$$\mathcal{L}u_0 = au_0 + bu_{0,x} + cu_{0,y} + du_{0,xx} + eu_{0,xy} + mu_{0,yy} = f_0$$

$$\mathcal{G}u_0 = \alpha u_0 + \beta u_{0,n} = \alpha u_0 + \beta_1 u_{0,x} + \beta_2 u_{0,y} = g_0$$

stąd można obliczyć dwie wartości pochodnych niskich rzędów, np. :

$$u_{0,x} = \dots$$

$$u_{0,y} = \dots$$



Bowiem podobnie jak w *ID*, niektóre wartości na brzegu pochodnych cząstkowych mogą być określone już na etapie zapisania na nim równania różniczkowego : z obszaru i brzegowego.

Należy określić wstępną dyskretyzację warunku brzegowego :

$$Gu_0 = \sum_{j=0}^4 \gamma_j u_j ,$$

która po rozwinięciu w szereg *Taylora* prezentuje się następująco :

$$Gu_0 = \mathcal{L}u_0 + \Delta_0(u_{0,x}, u_{0,y}; u_{0,xx}, u_{0,xy}, u_{0,yy}; u_{0,xxx}, \dots, u_{0,yyyy}) + R = g_0 + \Delta_0$$

Występujące w członie korekcyjnym wielkości będą pochodzić :

$$u_{0,x}, u_{0,y} \text{ z równań problemu zapisanych na brzegu : } \mathcal{L}u_0 = f_0 \text{ oraz } \mathcal{G}u_0 = g_0$$

$$u_{0,xx}, u_{0,xy}, u_{0,yy} \text{ ze wzorów różnicowych}$$

$$u_{0,xxx}, \dots, u_{0,yyyy} \text{ z rozwinięcia w szereg } Taylora \text{ względem węzłów w obszarze}$$

Ostatecznie człon korekcyjny będzie zależny od wartości pochodnych niskiego rzędu na brzegu oraz od wartości pochodnych wyższego rzędu w obszarze.

Rozwinięcie pochodnych brzegowych względem węzłów w obszarze :

$$u_{0,xxx} = u_{3,xxx} - hu_{3,xxx} - hu_{3,xxxy} - \dots - hu_{3,yyyy} \quad itd$$

$$u_{3,xxx}, u_{4,yyyy} \text{ będą znane z kompozycji formuł różnicowych wewnątrz obszaru.}$$

Ostateczna postać członu korekcyjnego :

$$\Delta = \Delta(u_0, \dots, u_4, g, f, u_{3,xxx}, u_{4,yyyy}) .$$

ROZDZIAŁ 10 : KOŃCOWE UWAGI

W pracy zaprezentowano technikę aproksymacji wyższego rzędu zarówno w klasycznej *Metodzie Różnic Skończonych MRS* jak i w *Bezsiatkowej Metodzie Różnic Skończonych BMRS*. Podstawowym założeniem przedstawionego podejścia było całkowite uniezależnienie końcowego wyniku dyskretnego od jakości użytych operatorów różnicowych – tak aby ów wynik był ściśle w ramach założonego rzędu aproksymacji wielomianowej. Stanowi to największą przewagę podejścia nad istniejącym obecnie podejściem *defect correction*, które wprowadzało do operatorów nowe węzły (lub ogólnie : stopnie swobody), ale nie pozwalało otrzymywać rozwiązań niezależnych od jakości tych operatorów. W proponowanym podejściu przyjęto ponadto umowę, iż jeżeli klasyczny operator różnicowy był rzędu n , to wyniki końcowe mają być ściśle w ramach rzędu $2n$.

Konsekwencją przyjętego sposobu aproksymacji jest rozwiązywanie układów równań o tych samych macierzach współczynników, gdyż wszystkie poprawki odnoszące się do danego

operatora skumulowane są w prawej stronie równań różnicowych. Na te poprawki składały się wyrazy wyższego rzędu, do których należą :

- pochodne wyższych rzędów (tj. $n+1 - 2n$),
- wyrazy skoków w funkcji i jej pochodnych.

Pochodne wyższych rzędów należy znajdować poprzez ich składanie z wartości pochodnych rzędów niższych – znanych *a priori* bądź też z pierwszego etapu obliczeń. Wbudowanie skoków w człony korekcyjne pozwala oddać również postać rozwiązania o różnych stopniach gładkości.

Nadrzędnym celem pracy było przetestowanie sformułowanych algorytmów na prostych przykładach *ID* z dziedziny ugięć belek. Otrzymywano w tym przypadku ściśle wyniki analityczne ze względu na fakt, iż ugięcia są opisywane przez wielomiany. Pokazano, jak stworzyć ogólną procedurę aproksymacji wyższego rzędu *MRS* dla dowolnego zadania z dziedziny statyki belek (belki przegubowe, statycznie niewyznaczalne etc.) a także rozwiązano m.in. zadanie wyboczenia, które dla małej liczby węzłów dało wynik bliski analitycznemu dzięki uwzględnieniu wyrazów wyższego rzędu.

Należy też zwrócić uwagę na opracowanie oddzielnego sposobu korekty operatorów różnicowych brzegowych, co pozwoliło efektywnie rozwiązywać zadania z bardziej skomplikowaną strukturą warunków brzegowych.

Na koniec przedstawiono zupełnie nowe podejście *multi-point* bazujące na kombinacji liniowej wartości funkcji prawej strony wykorzystywanej na etapie korekty operatorów i mające wszystkie wyżej omówione zalety podejścia aproksymacji wyższego rzędu.

Poważnym krokiem w kierunku pełnej automatyzacji obliczeń było sformułowanie algorytmu podejścia dla wersji bezsiatkowej *BMRS*, różniącej się od wersji klasycznej brakiem wymogu regularności siatki węzłów, generacją wzorów różnicowych za pomocą techniki aproksymacji *MWLS*, oraz zupełnie dowolną postacią równania w obszarze i na jego brzegu. Ostatnia cecha rzutuje na sposób składania członów korekcyjnych, których dokładne wartości mogą być otrzymywane w wyniku zastosowania procedury iteracyjnej, startującej od rozwiązania klasycznego – niskiego rzędu. Bezsiatkowa wersja algorytmu była pomostem dla przeniesienia rozważań do dziedziny zadań *2D*. Na obecnym etapie zadanie aproksymacji wyższego rzędu dla problemów brzegowych *2D* zostało sformułowane, zarówno dla operatorów w obszarze jak i brzegowych.

Jako kolejne kroki analizy przewiduje się :

- rozwijanie techniki aproksymacji wyższego rzędu *BMRS* w dziedzinie zadań brzegowych *2D* (a później także *3D*), testowanie podejścia na typowych zadaniach benchmarkowych,
- konfrontacja podejścia z innymi technikami wyższego rzędu a także z technikami adaptacyjnymi (zwłaszcza z adaptacją typu *h*),
- zastosowanie podejścia w zadaniach nieliniowych (*1D*, *2D*),
- zastosowanie podejścia do analizy błędów *a posteriori* w *BMRS*
- implementację komputerową stworzonych algorytmów.

LITERATURA

- [1] Orkisz J., Finite Difference Method (Part III), in *Handbook of Computational Solid Mechanics*, M.Kleiber (Ed.) Springer - Verlag, Berlin, 1998, 336-432.
- [2] Orkisz J., Higher Order Meshless Finite Difference Approach, *13th Inter-Institute Seminar for Young Researchers*, Vienna, Austria, October 26-28, 2001.
- [3] Milewski S, J. Orkisz, On Higher Order MFDM In 1D Problems, *14th Inter-Institute Seminar for Young Researchers*, Zakopane, Poland, October 16-19, 2003.
- [4] Hackbush W., *Multi-Grid Methods and Applications*, Springer – Verlag, Berlin, 1985
- [5] Collatz L., *The Numerical Treatment of Differential Equations*. Springer, Berlin, 1966.
- [6] Liszka T., Program of irregular mesh generation for the finite difference method. *Mechanika i Komputer* 2:219 – 277, 1979.
- [7] Olszowski B., Radwańska M., *Mechanika Budowli*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, 2003.