

METODY MATEMATYCZNE W TECHNICIE

Materiały dla specjalności BIM (Budowle - Informacja i Modelowanie)

Witold Cecot

1 Motywacja

Programy komputerowe stosowane przez inżynierów, zarówno do obliczeń jak i przetwarzania informacji o budowlach (BIM), nie mogłyby powstać ani być rozwijane bez **matematycznego formułowania, czyli tworzenia modeli zjawisk i procesów** występujących w konstrukcjach umożliwiającym przewidywanie zachowania się konstrukcji w czasie ich użytkowania. Celem przedmiotu jest zapoznanie Słuchaczy z wybranymi zagadnieniami matematyki aby mogli być świadomymi użytkownikami oprogramowania obecnie dostępnego oraz tego które pojawi się w bliższej i dalszej przyszłości. Jednocześnie znajomość matematyki umożliwia właściwe zrozumienie mechaniki, dzięki czemu inżynier wyposażony w odpowiednie oprogramowanie może być znakomitym fachowcem.

2 Przestrzenie wektorowe (liniowe)

Uogólnienie pojęcia wektora stosowanego powszechnie w fizyce

- **Definicja:** Rzeczywista przestrzeń wektorowa składa się z
 - (a) V (zbioru obiektów zwanych wektorami, którymi mogą być funkcje, macierze, wektory fizyczne, ...)
 - (b) $+$ (działania dodawania przyporządkowującego dowolnej parze elementów zbioru V element tego zbioru)
 - (c) $*$ (działania mnożenia przez liczbę przyporządkowującego dowolnej parze składającej się z liczby rzeczywistej $r \in R$ i elementu zbioru V element zbioru V).

Działania są tak zdefiniowane, że

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$$

$$\exists \theta \in V : \mathbf{u} + \theta = \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V$$

$$\forall \mathbf{u} \in V, \exists (-\mathbf{u}) : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \theta$$

$$1 * \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

$$(rs) * \mathbf{v} = r(s * \mathbf{v}) \quad \forall r, s \in R, \mathbf{v} \in V$$

$$(r + s) * \mathbf{v} = r * \mathbf{v} + s * \mathbf{v} \quad \forall r, s \in R, \mathbf{v} \in V$$

$$r * (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = r * \mathbf{v} + r * \mathbf{w} \quad \forall r \in R, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$$

Uwaga: Ten sam zbiór V z jednym zestawem działań $(+, *)$ może być przestrzenią wektorową, a z innym zestawem działań może nie być przestrzenią wektorową.

• Przykłady przestrzeni wektorowych funkcji

1. $\mathcal{F}(\Omega)$ - funkcje rzeczywiste $\Omega \rightarrow R$
2. $C^0(\Omega)$ - ciągłe funkcje rzeczywiste $\Omega \rightarrow R$
3. $C^\infty(\Omega)$ - ciągłe funkcje rzeczywiste z ciągłymi wszystkimi pochodnymi $\Omega \rightarrow R$
4. $C_0^\infty(\Omega)$ - funkcje $C^\infty(\Omega)$ zerujące się na brzegu $\partial\Omega$
5. $P^{(n)}(\Omega) = \text{span}\{\mathbf{x}^\alpha : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in N^n\}$ - wielomiany n zmiennych $(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n})$
6. $P_{(k)}^{(n)}(\Omega) = \text{span}\{\mathbf{x}^\alpha : |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq k \in N\}$ - wielomiany stopnia k
7. $Q_{(k)}^{(n)}(\Omega) = \text{span}\{\mathbf{x}^\alpha : \alpha_i \leq k \in N\}$ - wielomiany stopnia k ze względu na każdą zmienną
8. $L^2(\Omega) = \{v \in \mathcal{F} : \int_\Omega v^2 d\Omega \in R\}$ - klasy funkcji całkownalnych z kwadratem
9. $H^k(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq k = 0, 1, 2, \dots\}$ - przestrzeń Sobolewa rzędu k

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^0 = 1, \quad H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$$

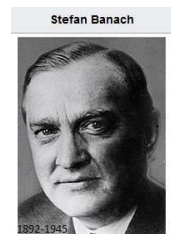
Uwaga: Jeżeli $2k > n$ to $H^k(\Omega) \subset C^0(\Omega)$

Dla $\Omega \subset R$ ($n = 1$)

H^1 – funkcje ciągłe

H^0 – funkcje nieciągłe

H^{-1} – dystrybucje (będą omówione później)



Przestrzenie Sobolewa są przestrzeniami **Banacha** (liniowymi, unormowanymi, zupełnymi).

$$\|v\|_{k,\Omega} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega (D^\alpha v)^2 d\Omega} \quad (1)$$

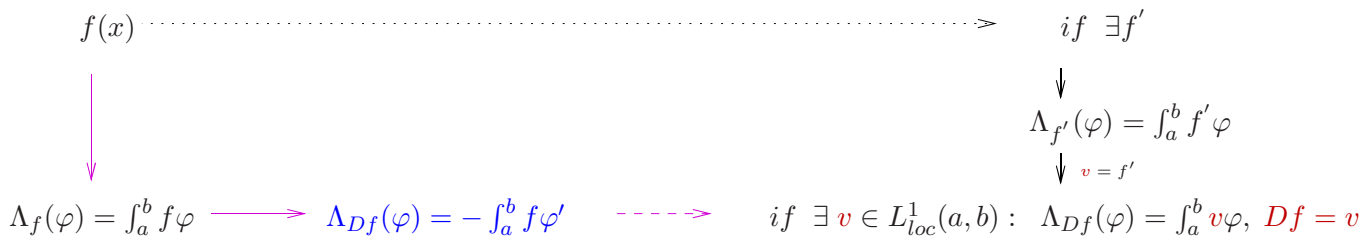
Są również przestrzeniami Hilberta (z iloczynem skalarnym)

$$\langle v, u \rangle_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha v D^\alpha u d\Omega \quad (2)$$

Pochodne w przestrzeniach Sobolewa są definiowane w sposób **słaby** t.zn.

DEF: Funkcja $u \in L^2(\Omega)$ ma pochodną w sensie słabym jeżeli istnieje funkcja $v \in L^2(\Omega)$, taka że

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi d\Omega = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi d\Omega \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (3)$$



Rysunek 1: Ilustracja pochodnej dystrybucyjnej (funkcjonał liniowy i ciągły Λ_{Df}) i pochodnej w sensie słabym (funkcja lokalnie całkowalna $Df = v$). Ciągłe strzałki oznaczają zawsze możliwe porządkowania, nieciągłe strzałki oznaczają możliwość zachodzącą tylko dla niektórych funkcji.

Wtedy funkcja v jest pochodną słabą funkcji u i jest oznaczana $D_w^\alpha u$ ($D_w^\alpha u = v$)

Uwaga: Pochodna w sensie klasycznym jest pochodną w sensie słabym.

Uwaga: Klasyczna pochodna jest definiowana w punkcie, jako granica ilorazów różnicowych, natomiast pochodna w sensie słabym jest definiowana w sposób całkowy. Zatem dowolna zmiana funkcji f na zbiorze miary zero (w punktach dla funkcji jednej zmiennej) nie wpływa w żaden sposób na pochodną w sensie słabym.

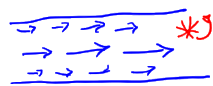
3 Działania na polach skalarnych (R) i wektorowych (R^2, R^3)

- Gradient $grad$ (∇) funkcji $f : \Omega \rightarrow R$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \mathbf{k} \quad f = f(x_1, x_2, x_3) \quad \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right] \quad (4)$$

- Rotacja $curl$ ($\nabla \times$) funkcji $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow R^3$


$$curl \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \lim_{S \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \, dl}{S} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{n} \quad (5)$$



$\sim \mathbf{i} (F_{3,2} - F_{2,3}) - \mathbf{j} (\dots) + \mathbf{k} (\dots)$
 $\parallel \frac{\partial F_3}{\partial x_2}$

- Dywergencja div ($\nabla \cdot$) funkcji $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow R^3$

$$div \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS}{V} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \quad (6)$$



- Laplasjan Δ (∇^2) funkcji $f : \Omega \rightarrow R$

$$\Delta f = div(grad(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \quad (7)$$

◇ Właściwości ciągu $f \rightarrow \mathbf{F}_o = grad f \rightarrow \mathbf{G}_o = curl \mathbf{F}_o \rightarrow div \mathbf{G}_o$

$$curl (grad f) = 0 \quad div (curl \mathbf{F}) = 0$$

$$Range(grad) = Ker(curl) \quad Range(curl) = Ker(div) \quad (8)$$

Pochodna słaba i dystrybucyjna

• Całkowanie przez części

$$(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow \int_a^b f'g dx = - \int_a^b fg' dx + fg|_a^b$$

• Uogólnienie funkcji

$\left. \begin{matrix} \text{Np. } x^2 & \vee \\ & |x| & \times \\ & |x| & \times \\ & |x| & \times \\ & |x| & \times \\ & |x| & \times \end{matrix} \right\} f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

--- dla n.p. "x²" --->

pochodne
 $f': [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

$\varphi \in C_0^\infty(a,b)$
 $\varphi(a) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi = 0$
 $\varphi(b) = \lim_{x \rightarrow b} \varphi = 0$

↓ "testowanie" funkcji f

$$\Lambda_f(\varphi) = \int_a^b f\varphi dx \in \mathbb{R}$$

funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

↓ "testowanie" (f')

$$\Lambda_{f'}(\varphi) = \int_a^b f'\varphi dx$$

||
 $-\int_a^b f\varphi' dx$

mużna

zawsze →

$$\Lambda_{df}(\varphi) = - \int_a^b f\varphi' dx$$

Pochodna dystrybucyjna

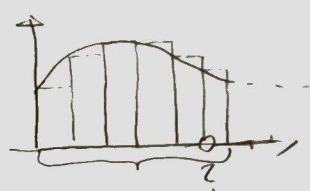
dla $x^2, |x|, \dots$

Jezeli $\exists w(x):$

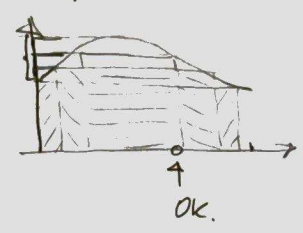
$$- \int_a^b f\varphi' = \int_a^b w\varphi$$

wtedy $w(x)$ jest pochodną słabą $f(x)$

Riemann



Lebesgue



Przykład 1 (pochodna dystrybucyjna)

(W₂)

$$f = x^2, x \in \mathbb{R} \quad (f - \text{ciągła})$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{x^2}^{\text{def}} &= - \int_a^b x^2 \varphi' dx = \underbrace{\int_a^b 2x \varphi dx}_{\text{pod. dystr.}} - x^2 \varphi \Big|_a^b = \\ &= \int_a^b 2x \varphi dx \\ &\quad \uparrow \\ &\quad u(x) - \text{istnieje w sensie Slobiana} \end{aligned}$$

Przykład 2

$$f = |x|, x \in \mathbb{R} \quad (f - \text{ciągła})$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{|x|}^{\text{def}} &= - \int_a^b |x| \varphi' dx = - \int_a^0 |x| \varphi' dx - \int_0^b |x| \varphi' dx = \\ &= \int_a^0 x \varphi' dx - \int_0^b x \varphi' dx = - \int_a^0 1 \varphi + x \varphi \Big|_a^0 + \int_0^b 1 \varphi - x \varphi \Big|_0^b = \\ &= \int_a^0 \text{sign}(x) \varphi dx + \int_0^b \text{sign}(x) \varphi dx = \\ &= \int_a^b \text{sign}(x) \varphi dx \\ &\quad \leftarrow w \end{aligned}$$

$$\underbrace{0 \varphi(0) - a \varphi(a) - b \varphi(b) + 0 \varphi(0)}_{\substack{0 & 0 & 0 & 0}}$$

Przykład 3

$$f = H \quad \begin{array}{c} \uparrow 1 \\ \text{---} \rightarrow \end{array} \quad (H - \text{nieciągła})$$

$$\underline{\underline{\Lambda_{DH}(\varphi)^{\text{def}} = - \int_0^{\infty} \varphi' dx = \int_0^{\infty} 0 \cdot \varphi dx - 1 \cdot \varphi \Big|_0^{\infty} = -\varphi(\infty) + \varphi(0) = \varphi(0)}}$$

Istnieje tylko pod. dystrybucyjna

Dirac delta

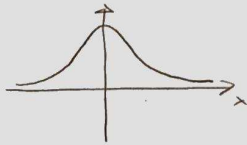
$$\Lambda_{DH}(\varphi) = \delta(\varphi) = \varphi(0)$$

= Wzór Greena (całkowanie przez części), $\partial\Omega$ - gładka krzywa albo wielokąt

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial w}{\partial x_k} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} w d\Omega + \int_{\partial\Omega} u w n_k ds \quad (9)$$

Delta Diraca jako granica funkcji " $\delta_n \rightarrow \delta$ " W3

$$\delta_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$$



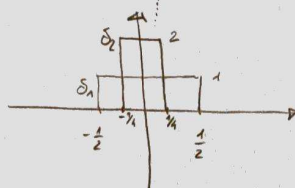
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n dx = 1$$

$$\delta_n = \frac{n}{\pi} \frac{\sin nx}{nx}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta dx = 1$$

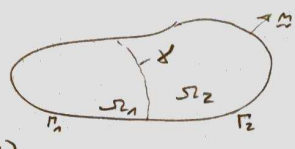
$$\delta_n = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{2n} \\ 1/n & -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \frac{1}{2n} < x \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta \varphi = \varphi(0)$$

$H^1(\text{div}, \Omega)$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \end{bmatrix}, \varphi = \varphi(x,y)$$



$$\underline{u} = \begin{cases} \underline{u}^{(1)} & \text{w } \Omega_1 \\ \underline{u}^{(2)} & \text{w } \Omega_2 \end{cases}$$

$$\text{div } \underline{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

Dywergencja w sensie słabym

obliczane przez części

$$(\Lambda_{\underline{u}}(\varphi) = \int_{\Omega} \underline{u} \cdot \nabla \varphi \, d\Omega)$$

$$\int_{\Omega} \varphi \text{div } \underline{u} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \underline{u} + \int_{\partial \Omega} \varphi \underline{u} \cdot \underline{n} \, ds$$

$$\Lambda_{\text{Div } \underline{u}}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\Omega} \underline{u} \cdot \nabla \varphi \, d\Omega = - \int_{\Omega_1} \underline{u}_1 \cdot \nabla \varphi \, d\Omega - \int_{\Omega_2} \underline{u}_2 \cdot \nabla \varphi \, d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega_1} \varphi \text{div } \underline{u}_1 \, d\Omega + \int_{\Omega_2} \varphi \text{div } \underline{u}_2 \, d\Omega - \int_{\Gamma} \underline{u}_1 \cdot \underline{n} \varphi \, ds - \int_{\Gamma} \underline{u}_2 \cdot \underline{n} \varphi \, ds +$$

$$- \int_{\Gamma} \underline{u}_1 \cdot \underline{\nu} \varphi \, ds - \int_{\Gamma} \underline{u}_2 \cdot (-\underline{\nu}) \varphi \, ds = \int_{\Omega} \text{div } \underline{u} \varphi \, d\Omega - \int_{\Gamma} [\underline{u}_1 \cdot \underline{n} - \underline{u}_2 \cdot \underline{n}] \varphi \, ds$$

Składowe wektora \underline{n} w kier. maksymalnej φ

oraz

$$\int_{\Omega} \underline{u} \text{div } \underline{w} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \text{grad } \underline{u} \cdot \underline{w} \, d\Omega + \int_{\partial \Omega} \underline{u} \cdot \underline{w} \cdot \underline{n} \, ds \quad (10)$$

= W szczególności zachodzi tw. o dywergencji

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (11)$$

= Twierdzenie Stokesa

$$\int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \, ds \quad (12)$$

= Całkowanie przez części dla rotacji

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{curl} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \times \mathbf{w} \, ds \quad (13)$$

- Dla funkcji wektorowych

$H^1(\Omega)$ oznacza, że każda składowa wektora jest funkcją klasy $H^1(\Omega)$

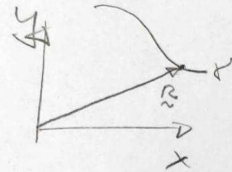
$H(\operatorname{curl}, \Omega) = \{\mathbf{v} : \operatorname{curl}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)\}$

$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} : \operatorname{div}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)\}$

4 Krzywe i powierzchnie

Krzywe (2D, 3D)

$$y: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{równanie parametryczne} \\ , t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \end{array}$$

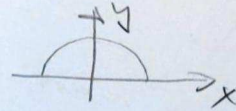


wektor wodzący $\underline{\tilde{r}}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$

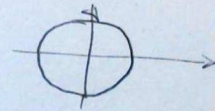
Przykłady

$$\begin{cases} x = \alpha t + \beta \cos t \\ y = \alpha t + \beta \sin t \end{cases}$$

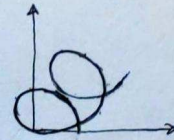
(a) $\alpha = 0, \beta = 1, t \in [0, \pi]$



(b) $t \in [0, 2\pi]$

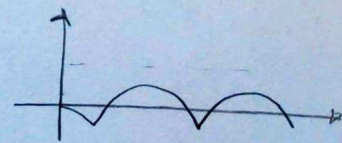


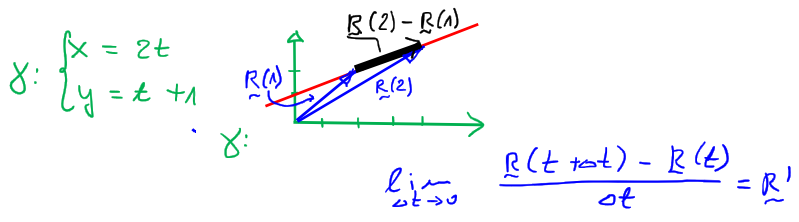
(c) $\alpha = 0.1, \beta = 1, t \in [0, 4\pi]$



(d) $\alpha = -1, \beta = 1, t \in [0, 4\pi]$

cykloida





Trójścian Freneta

(a) $\tilde{R}' = \left[\overset{\frac{dx}{dt}}{x''}, y'', z'' \right]$ - wektor styczny

(b) $\tilde{T} = \frac{\tilde{R}'}{\|\tilde{R}'\|}$ $\|\tilde{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ - wektor styczny

(c) równ. stycznej. prostej $\gamma_s: \begin{cases} x = x_0 + x'_0 t \\ y = y_0 + y'_0 t \\ z = z_0 + z'_0 t \end{cases}$

(d) Π_1 - płaszczyzna normalna $\Pi_1 \perp \tilde{T}$

(e) Π_2 - płaszczyzna ściśle styczna (oskulacyjna)
 $\Pi_2 \perp (\tilde{R}' \times \tilde{R}'')$ $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

(f) $\tilde{B} = \tilde{R}' \times \tilde{R}''$ - binormalna $\Pi_2 \perp \tilde{B}$

(g) $\tilde{N} = \tilde{B} \times \tilde{T}$ - normalna główna $\Pi_3 \perp \tilde{N}$
 $\tilde{N} = \Pi_1 \cap \Pi_2$

(h) $\begin{cases} \Pi_3 \perp \Pi_1 \\ \Pi_3 \perp \Pi_2 \end{cases}$ Π_3 - pł. prostokątna
 Π_1, Π_2, Π_3 - trójścian Freneta

(i) $\kappa = \frac{\|\tilde{R}''\|}{\|\tilde{R}'\|^3} = \frac{\|\tilde{T}'\|}{\|\tilde{N}\|}$ - krzywizna

(j) $\tau = \frac{\|\tilde{B}'\|}{\|\tilde{N}\|}$ - skręcenie $\kappa \tilde{T} + \tau \tilde{B} = -\tilde{N}'$

Całka po krzywej

f - f. skalarna

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] \underbrace{\sqrt{\vec{R}' \cdot \vec{R}'}}_{\|\vec{R}'\|} dt$$
$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

\vec{F} - f. wektorowa

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{R}' dt \quad (\text{work})$$

Zad. 1.

Narysować wektory T, B, N dla wybranej krzywej i punktu

Zad. 2

Obl. długość obwodu okręgu $(= \int ds)$

Powierzchnie

4

$$\Pi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

$$\vec{R} = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$$

$(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$

" $[a, b] \times [c, d]$

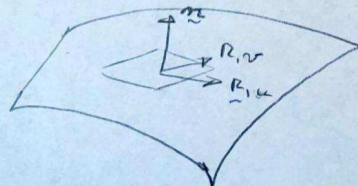
pow. styczniowe

$$\Pi_s : \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

(ρ, θ, φ) - wsp. styczniowe

$$\vec{n} = \vec{R}_{,u} \times \vec{R}_{,v} \quad - \text{wektor normalny}$$

↑
wektory styczniowe



Całki po powierzchniach

$$\iint_{\Pi} f(x, y, z) dA = \iint_D f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \|\vec{R}_{,u} \times \vec{R}_{,v}\| du dv$$

$\|\vec{n}\|$

Zad. 3

Obliczyć powierzchnię kuli $(= \iint_{\Pi} dA)$

Całka objęściowa

$$\int_V f(x,y,z) dV = \int_{\Sigma} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)] \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du dv dw$$

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} x_{,u} & x_{,v} & x_{,w} \\ y_{,u} & y_{,v} & y_{,w} \\ z_{,u} & z_{,v} & z_{,w} \end{bmatrix} \right|$$

macierz Jacobiego

Zad. 4

Obliczyć objętość kuli jako całka objęściowa

Approximation of functions
Representation of curves & surfaces

Given : $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}$

Find a polynomial

$$w(x) = \alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2 \phi_2(x) + \dots + \alpha_m \phi_m(x)$$

↑ basis f. dot.

Least squares
 $w(x) = \alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2 \phi_2(x) + \dots + \alpha_m \phi_m(x)$
 Done
 $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}$
 $m > n$

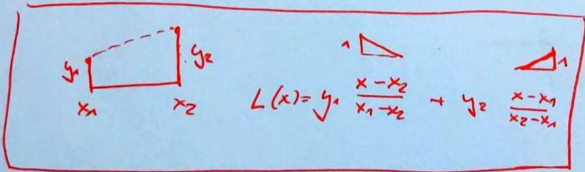
$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_m) & \phi_2(x_m) & \dots & \phi_m(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

 $A^T A \alpha = A^T y$
 $A^T (A \alpha - y) = 0$
 $\|A \alpha - y\| \rightarrow \min$
 $\alpha^T + A \alpha = y$
 $A^T \alpha = 0$

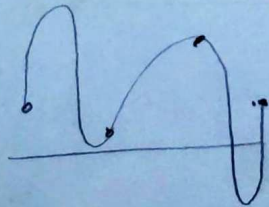
① $m = n$ Lagrange polynomials

$$\alpha_i = y_i$$

$$\phi_i(x) = L_i^{(m-1)}(x) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^m (x - x_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^m (x_i - x_j)}$$



Disadvantage : Oscillations for larger n



→ NURBS
CAD

NURBS - Non Uniform Rational B-Splines (7)

$$\gamma: C(t) = \frac{\sum_{i=0}^m P_i w_i B_i^p(t)}{\sum_{i=0}^m w_i B_i^p(t)} \quad t \in [0,1]$$

P_i - punkty kontrolne, $i=0,1,\dots,m$

w_i - wagi ($w_i > 0$)

$B_i^p(t)$ - B-splajny stopnia "p"

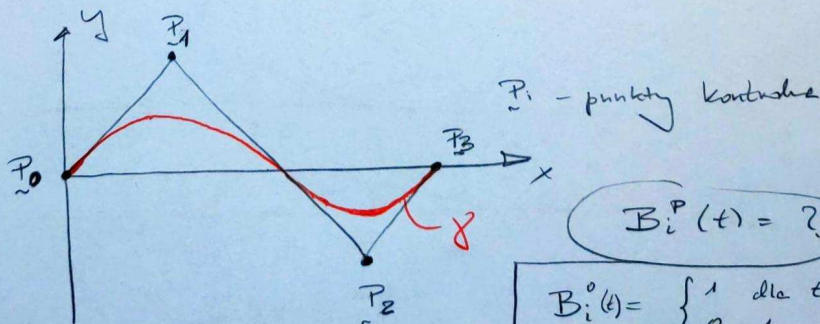
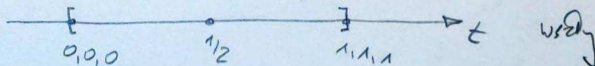
$T_j \in [0,1]$ - knots (węzły) $j=0,1,\dots,k$

$$k = m + p + 1$$

$$T = \left\{ \underbrace{0,0,\dots,0}_{(p+1) \times}, \overbrace{t_{p+2}, \dots, t_m}^{m-p-1}, \underbrace{1,1,\dots,1}_{(p+1) \times} \right\}$$

Prz.

$m=3$ (3 odcinki, 4 punkty)
 $p=2 \rightarrow k=6$ (6 przedziałów, 7 węzłów)



$$B_i^p(t) = ?$$

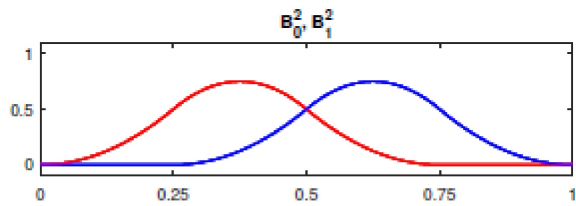
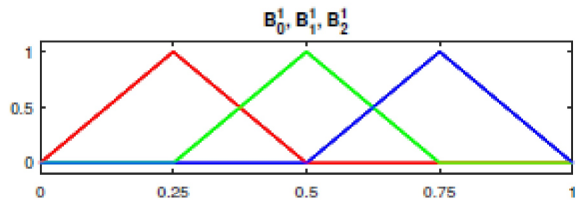
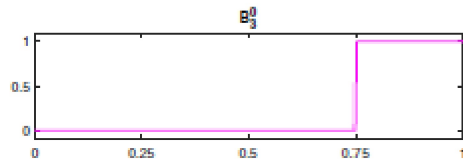
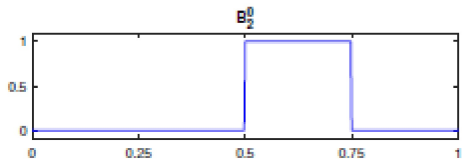
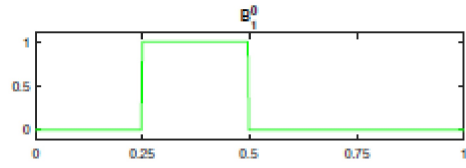
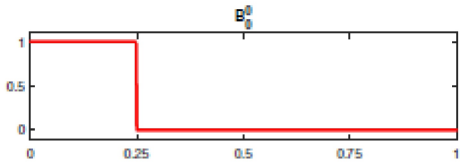
Exact: circles
 ellipses
 parabolas
 hyperbolas

Invariant under: scaling
 rotation
 translation

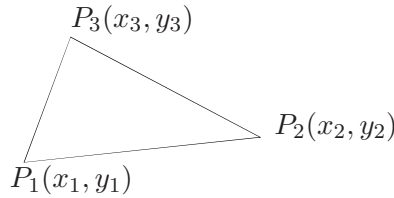
$$B_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \end{cases}$$

$$B_i^p(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+q}-t_i} B_i^{q-1} + \frac{t_{i+q+1}-t}{t_{i+q+1}-t_{i+q}} B_{i+1}^{q-1}$$

$$\frac{0}{0} \text{ def } 0$$



5 Interpolacja pól wektorowych w elementach trójkątnych



\exists poch. w sensie Słaby
 $\exists f'(x_0)$ klas.
 $\exists f'_0$ w sensie Słaby
 $\exists f'_0$ - w.s. kl.
 $\exists f'_0$ - w.s. Sł.

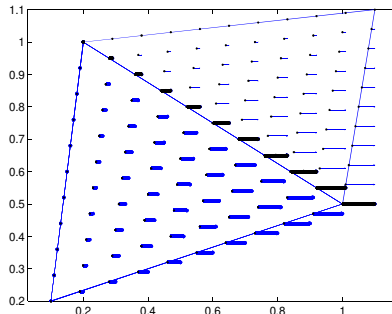
Rysunek 2: Równania krawędzi: $l_i(x, y) = A_i x + B_i y + C_i = 0$, $[A_i, B_i] = \mathbf{n}$, $i = 1, 2, 3$

- $H_1(\Omega)$ - ciągłość każdej składowej $\Rightarrow \exists \underline{u}_n$ (w sensie Słaby)

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} \xi_2 \\ 0 \end{bmatrix} a_2 + \begin{bmatrix} \xi_3 \\ 0 \end{bmatrix} a_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_1 \end{bmatrix} b_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{bmatrix} b_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_3 \end{bmatrix} b_3 \quad (14)$$

a_1, a_2, a_3 - składowe w kierunku x w węzłach

b_1, b_2, b_3 - składowe w kierunku y w węzłach



Rysunek 3: Aproksymacja $H^1(\Omega)$

- $H(\text{curl}, \Omega)$ - ciągłość składowej stycznej $\Rightarrow \exists \text{curl}(\underline{u}_n)$ (Słaby)

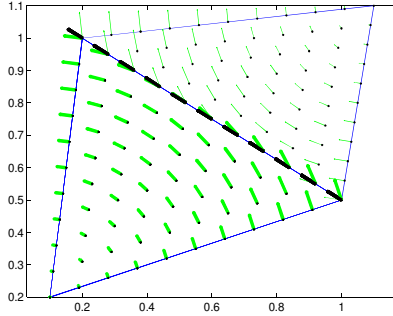
$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{y_1 - y}{l_1(x_1, y_1)} \\ \frac{x_1 - x}{l_1(x_1, y_1)} \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} -\frac{y_2 - y}{l_2(x_2, y_2)} \\ \frac{x_2 - x}{l_2(x_2, y_2)} \end{bmatrix} \alpha_2 + \begin{bmatrix} -\frac{y_3 - y}{l_3(x_3, y_3)} \\ \frac{x_3 - x}{l_3(x_3, y_3)} \end{bmatrix} \alpha_3 \quad (15)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - wartości średnie składowych stycznych na krawędziach

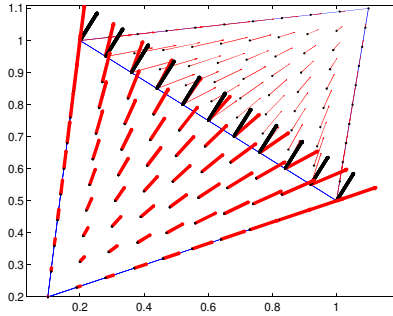
- $H(\text{div}, \Omega)$ - ciągłość składowej normalnej $\Rightarrow \exists \text{div}(\underline{u}_n)$ (Słaby)

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - x}{l_1(x_1, y_1)} \\ \frac{y_1 - y}{l_1(x_1, y_1)} \end{bmatrix} \beta_1 + \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x}{l_2(x_2, y_2)} \\ \frac{y_2 - y}{l_2(x_2, y_2)} \end{bmatrix} \beta_2 + \begin{bmatrix} \frac{x_3 - x}{l_3(x_3, y_3)} \\ \frac{y_3 - y}{l_3(x_3, y_3)} \end{bmatrix} \beta_3 \quad (16)$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - wartości średnie składowych normalnych na krawędziach



Rysunek 4: Aproxymacja $H(\text{curl}, \Omega)$

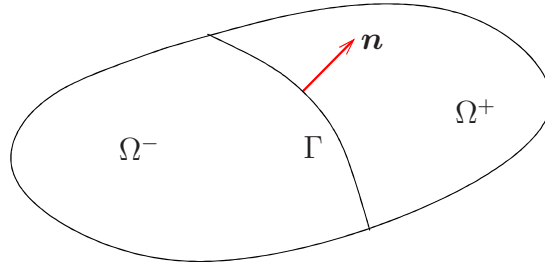


Rysunek 5: Aproxymacja $H(\text{div}, \Omega)$

Dwukrotnie mniej stopni swobody (3 zamiast 6) przy aproksymacjach typu $H(\text{curl}, \Omega)$, $H(\text{div}, \Omega)$ niż $H_1(\Omega)$ wynika z dodatkowych ograniczeń (zależności między składowymi interpolanta) jakie muszą spełniać aby były elementami odpowiednich przestrzeni. Tymi stopniami swobody są średnie wartości na krawędzi odpowiednio składowej stycznej albo normalnej.

Łatwo wykazać, że **ciągłość składowych normalnych pola wektorowego jest warunkiem koniecznym istnienia dywergencji** tego pola w sensie słabym i tym samym aby było ono klasy $H(\text{div}, \Omega)$. Rozważmy w tym celu obszar Ω będący sumą dwóch rozłącznych podobszarów Ω^- i Ω^+ ze wspólną częścią brzegu Γ (rys. 6), na której przyjmijmy wektor normalny n skierowany na zewnątrz pierwszego podobszaru Ω^- . Przyjmijmy dodatkowo następujące oznaczenia: $\Gamma^- = \partial\Omega^- \setminus \Gamma$ oraz $\Gamma^+ = \partial\Omega^+ \setminus \Gamma$. W celu sprawdzenia jakie warunki należy spełnić, aby istniała dywergencja funkcji wektorowej $\mathbf{w} : R^n \supset \Omega \rightarrow R^n$ ($\mathbf{w} = \mathbf{w}^-$ dla $\mathbf{x} \in \Omega^-$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}^+$ dla $\mathbf{x} \in \Omega^+$) w takim podobszarze, skorzystajmy ze wzoru (9) dla każdej ze składowych wektora $\mathbf{w}(x_1, x_2, x_3)$ oraz funkcji testowej $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Przykładowo dla w_1 zachodzi

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} d\Omega &= - \int_{\Omega^-} \frac{\partial w_1^-}{\partial x_1} \varphi d\Omega + \int_{\Gamma^-} \varphi w_1^- n_1 ds + \int_{\Gamma} \varphi w_1^- n_1 ds + \\
 &\quad - \int_{\Omega^+} \frac{\partial w_1^+}{\partial x_1} \varphi d\Omega + \int_{\Gamma^+} \varphi w_1^+ n_1 ds - \int_{\Gamma} \varphi w_1^+ n_1 ds = \\
 &= - \int_{\Omega} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \varphi d\Omega + \int_{\partial\Omega} \varphi w_1 n_1 ds - \int_{\Gamma} \varphi (w_1^+ - w_1^-) n_1 ds
 \end{aligned} \tag{17}$$



Rysunek 6: Obszar składający się z dwóch podobszarów

Analogiczne tożsamości zachodzą dla w_2, w_3 . Ponieważ $\varphi = 0$ na $\partial\Omega$ to warunkiem koniecznym zerowania się sumy całek po wspólnym brzegu Γ , a tym samym istnienia dywergencji funkcji \mathbf{w} obliczanej jako suma $\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3}$ jest zerowanie się skoku składowej normalnej $(\mathbf{w}^- - \mathbf{w}^+) \cdot \mathbf{n}$.

6 Metoda multigrid



Układ równań algebraicznych

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U} \quad (18)$$

- Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań algebraicznych

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k) && \text{ogólny schemat iteracji} \\ \mathbf{e}_k &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_k && \text{błąd algebraiczny} \\ \mathbf{r}_k &= \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k && \text{residuum} \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_k &= \mathbf{r}_k && \text{relacja między błędem a residuum} \end{aligned} \quad (19)$$

Przykłady macierzy \mathbf{P} (*preconditioner*)

- $\mathbf{P} = \mathbf{A}$ - idealna dla zbieżności, niepraktyczna
- $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ - Jacobi
- $\mathbf{P} = \mathbf{L} + \mathbf{D}$ - Gauss-Seidel

Tempo zbieżności zależy od promienia spektralnego $\rho(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A})$.

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\| \approx |\rho| \|\mathbf{e}_k\| \quad (20)$$

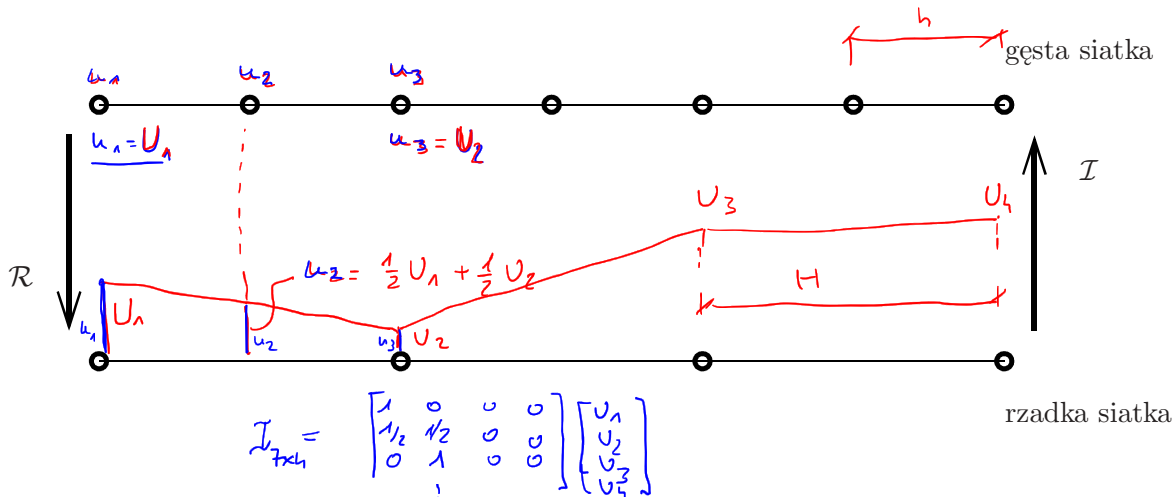
Zwykle jest on bliski 1 i zbieżność jest bardzo wolna.

- Algorytm metody multigrid

Najczęściej jest stosowany dla układów równań wynikających z dyskretyzacji. Rozważmy dwie dyskretyzacje dla równania zwyczajnego (1D)

Najprostszy algorytm dla dwóch siatek, którym odpowiadają układy równań

$$\mathbf{A}_h \mathbf{x}_h = \mathbf{b}_h \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}_H \mathbf{x}_H = \mathbf{b}_H \quad (21)$$



Rysunek 7: Dwie dyskretyzacje z operatorami restrykcji \mathcal{R} i interpolacji \mathcal{I}

(prolongacji \mathcal{P}) $R = P^T (\mathcal{I}^T)$

gdzie macierz dla siatki rzadkiej nie jest agregowana tylko obliczana przez t.zw. wariacyjne rozrzedzenie, zachowujące symetrię, t.zn.

$$A_H = \mathcal{R} A_h \mathcal{I} \quad (22)$$

jest następujący

1. Kilka (n) iteracji na siatce gęstej dla $A_h x_h = b_h \Rightarrow r_h = b_h - A_h x_h^{(n)}$. $\|r_h\| < \varepsilon \rightarrow \text{STOP}$.
2. Restrykcja residuum na siatkę rzadką $r_H = \mathcal{R} r_h$
3. Kilka iteracji na siatce rzadkiej dla $A_H e_H = r_H$
4. Interpolacja błędu $e_h = \mathcal{I} e_H$
5. Uaktualnienie rozwiązania na siatce gęstej $x_h = x_h + e_h$. GO TO 1.

$$\begin{aligned} A x_h &= b & r &= b - A x_h \\ e &\stackrel{\text{def}}{=} x - x_h \\ A(e + x_h) &= b \\ A e &= b - A x_h \\ &= r \end{aligned}$$

7 Całkowe równania brzegowe

- Dla zagadnienia brzegowego 1D

$$-\alpha u'' = q, \quad x \in (0, L) \\ + \text{war. brzegowe} \quad (23)$$

rozwiązanie fundamentalne to taka funkcja $v^*(x, \xi)$, że

$$-\alpha (v^*)'' = \delta_\xi, \quad x, \xi \in R \\ \text{BEZ war. brzegowych} \quad (24)$$

$$v^* = \frac{1}{\alpha} \begin{cases} (1 - \frac{\xi}{L})x + L, & \text{dla } x \leq \xi \\ (1 - \frac{x}{L})\xi + L, & \text{dla } \xi \leq x \end{cases} \quad T^* = \alpha \frac{\partial v^*}{\partial x} = \begin{cases} 1 - \frac{\xi}{L}, & \text{dla } x \leq \xi \\ -\frac{\xi}{L}, & \text{dla } \xi \leq x \end{cases} \quad (25)$$

Tożsamość Somigliana dla równania (23)

$$u(\xi) = \int_0^L v^*(x, \xi) q(x) dx + [v^*(x, \xi) T(x) - T^*(x, \xi) u(x)] \Big|_{x=0}^{x=L} \quad (26)$$

Przykład: dla zagadnienia

$$\begin{aligned} -u'' &= 1 & \text{dla } x \in (0, 1) \\ u(0) &= 0 \\ u'(1) &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

wzór (26) przedstawia rozwiązanie (27) i przyjmuje postać

$$u(\xi) = \int_0^1 v^*(x, \xi) dx + u(1)\xi - u'(0) \quad (28)$$

Jednak $u(1)$ - przemieszczenie wolnego końca oraz $u'(0)$ - reakcja na podporze, nie są znane. W następnym punkcie, na przykładzie 2D, pokazano jak te brakujące wielkości brzegowe można obliczyć.

- Dla równania Laplace'a definiującego funkcję $u(x, y)$

$$\begin{aligned} -k\Delta u &= f(x, y) & \text{w } \Omega \\ u &= \hat{u} & \text{na } \partial\Omega_u \\ k\frac{\partial u}{\partial n} &= \hat{q} & \text{na } \partial\Omega_q \end{aligned} \quad (29)$$

Tożsamość Somigliana ma postać

$$cu(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega} v^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})f(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} [v^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})t(\mathbf{x}) - t^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})u(\mathbf{x})] d\gamma \quad (30)$$

gdzie $v^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ jest rozwiązaniem fundamentalnym równania Laplace'a czyli spełniająca to równanie bez warunków brzegowych w nieograniczonym obszarze R^2 z prawą stroną równą delcie Diraca $\delta_{\boldsymbol{\xi}}$

$$v^* = -\frac{1}{4\pi k} \ln r^2, \quad t^* = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x_1 - \xi_1)n_1 + (x_2 - \xi_2)n_2}{r^2}, \quad r^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \quad (31)$$

Całkowe równanie brzegowe (dla $u|_{\partial\Omega} = \hat{u}$): znaleźć $t : \partial\Omega \rightarrow R$ i gładkiego brzegu

$$\int_{\partial\Omega} v^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})t(\mathbf{x}) d\gamma = \frac{1}{2}\hat{u}(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\partial\Omega} t^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\hat{u}(\mathbf{x}) d\gamma - \int_{\Omega} v^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})f(\mathbf{x}) d\Omega \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega \quad (32)$$

Dyskretyzacja $t \in L_2(\partial\Omega)$ odcinkowo stałymi funkcjami ($t_j = const$ na odcinku j oraz konsekwentnie $\hat{u}_j = const$ na odcinku j) i metoda kollokacji (spełnienie równania w środku każdego odcinka i) prowadzą do układu algebraicznych równań liniowych

$$t_j \int_{\partial\gamma_j} v^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_i) d\gamma_x = \frac{1}{2}\hat{u}_i + \hat{u}_j \int_{\partial\gamma_j} t^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_i) d\gamma_x - \int_{\Omega} v^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_i)f(\mathbf{x}) d\Omega \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (33)$$

Po rozwiązaniu tego układu równań algebraicznych można skorzystać ze wzoru na rozwiązanie w punktach wewnętrznych

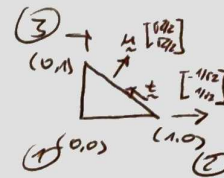
$$u(\boldsymbol{\xi}) = t_j \int_{\partial\gamma_j} v^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\gamma_x - \hat{u}_j \int_{\partial\gamma_j} t^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\gamma_x + \int_{\Omega} v^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})f(\mathbf{x}) d\Omega \quad (34)$$

8 Zadania

1. Obliczyć pochodną słabą funkcji $f_i : R \supset [-1, 1] \rightarrow R$, dla $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = |x| + 1$, $f_3(x) = \sqrt{|x|}$.
2. Dla wybranych pól wektorowych i obszaru Ω w kształcie trójkąta obliczyć stopnie swobody dla aproksymacji $H^1(\Omega)$, $H(\text{curl}, \Omega)$, $H(\text{div}, \Omega)$.
3. Zapisać macierze interpolacji i restrykcji dla dwóch siatek, odpowiednio o 5 i trzech węzłach.
4. Dla krzywej $x = -3t^2$, $y = 4t^2$, $t \in [0, 10]$ obliczyć współrzędne punktu odpowiadającego $t = 2$, wektor styczny w tym punkcie i długość krzywej od jej początku do tego punktu.
5. Dla funkcji $u = x^2y^3$ obliczyć $\text{div}[\text{grad}(u)]$. Podać przykład wektora \mathbf{b} prostopadłego do ∇u . Obliczyć $\mathbf{b} \times \nabla u$.

Zad. 2

• Pole wektorowe $\tilde{u} = \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \end{bmatrix}$, element



• Aproksymacja H^1 , stopnie swobody w węzle ③ (u_1, u_2)

$$u_1 = u_x|_{(x=1, y=0)} = 1$$

$$u_2 = u_y|_{(x=1, y=0)} = 0$$

• Aproksymacja $H(\text{curl})$, stopnie swobody na krawędzi ③⑤ (d)

$$d_{23}: \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \end{cases}, t \in [0, 1] \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

$$d = \frac{1}{|d_{23}|} \int_{d_{23}} \tilde{u} \cdot \tilde{t} ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{d_{23}} (-x^2 + xy) \frac{1}{\sqrt{2}} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 [-t^2 + t(1-t)] \sqrt{2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 (t - 2t^2) dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2} t^2 - \frac{2}{3} t^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{12}$$