

Metody Obliczeniowe

notatki do wykładu dla 2 roku I stopnia kierunku Budownictwo

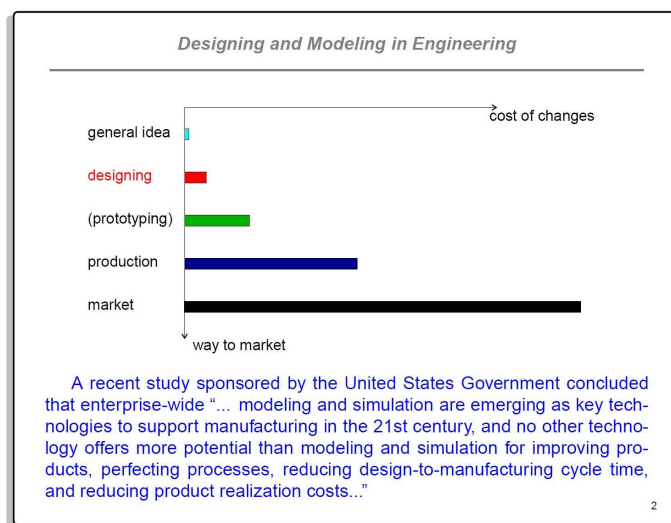
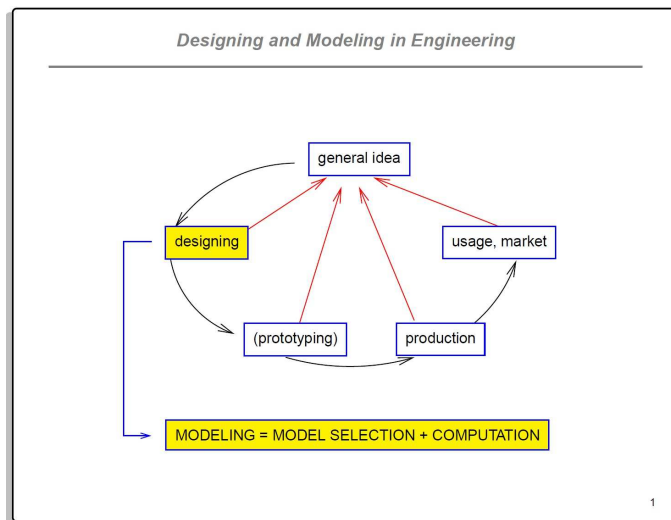
Witold Cecot

Contents

1	Motywacja	2
2	Aproksymacja MES	2
3	Sformułowanie mocne zadania pręta w stanie jednoosiowym	4
4	Sformułowania słabe zadania pręta w stanie jednoosiowym	5
5	Metoda Galerkin	7
6	Algorytm MES na przykładzie zadania 1D	8
7	MES dla stacjonarnego przepływu ciepła w 2D	16
8	MES dla liniowej sprężystości	24
9	Analiza kratownic za pomocą MES	28
10	MES dla belek	35
11	Zastosowanie MES do zadań dynamiki	38
12	Oszacowanie błędów aproksymacji MES	43

1 Motywacja

Najczęściej obecnie stosowaną metodą do obliczania interesujących projektanta wielkości, takich jak ugięcia, siły przekrojowe, naprężenia, przemieszczenia jest Metoda Elementów Skończonych (MES). Stanowi podstawę algorytmów używanych w programach służących do projektowania konstrukcji inżynierskich (np. Robot, Abaqus, Ansys, Catia, Altair HyperWorks i wiele innych). Ponieważ jednak za wyniki obliczeń odpowiada projektant korzystający z oprogramowania, a nie programista, który opracował system, znajomość podstaw MES jest kluczowa dla właściwego i bezpiecznego stosowania kodów komercyjnych.



2 Aproksymacja MES

W MES stosowana jest aproksymacja za pomocą specjalnych funkcji bazowych, zwanych funkcjami kształtu.

Dla funkcji jednej zmiennej $u : [a, b] \ni x \rightarrow u(x) \in R$ szukamy $u_h(x) \approx u(x)$ w postaci $u_h(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x)$, gdzie α_i to nieznanne parametry zwane stopniami swobody, a $\varphi_i(x)$ są funkcjami kształtu definiowanymi za pomocą elementów skończonych.

1. Dyskretyzacja i liniowe, ciągłe globalne funkcje kształtu.

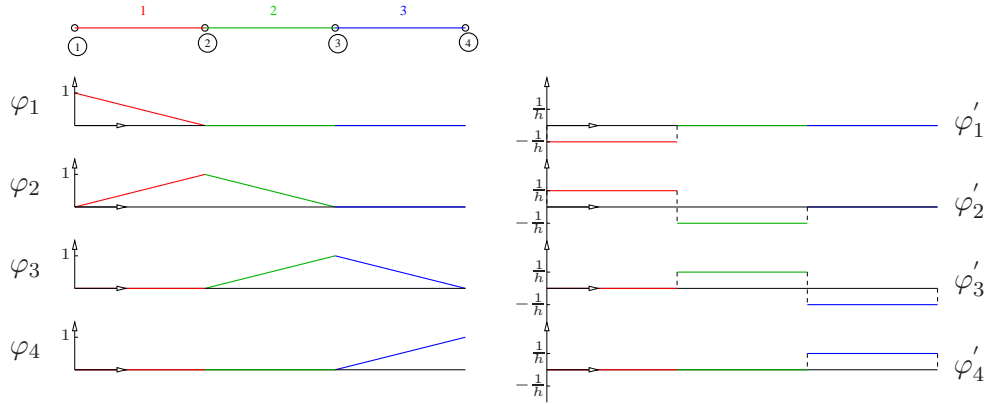


Figure 1: Dyskretyzacja za pomocą 3 elementów oraz wykresy funkcji kształtu Lagrange'a stopnia 1 (są **ciągłe i mają małe nośniki**). Pochodna w sensie klasycznym nie wszędzie istnieje.

2. Definicja stopni swobody

$$\varphi_i - \text{wielomiany Lagrange'a, } \varphi_i(x_k) = \delta_{ik} \Rightarrow \alpha_i = u_h(x_i)$$

Jeżeli $\alpha_i = u(x_i)$ to $u_h(x)$ jest interpolantem, takim że $u_h(x_i) = u(x_i)$.

3. Pojedynczy element skończony, algorytm obliczeń element po elemencie

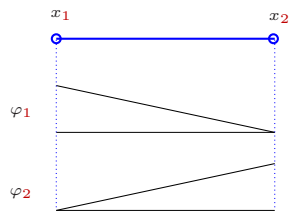


Figure 2: **Lokalnie** ponumerowane funkcje kształtu $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ elementu skończonego o węzłach x_1, x_2 (również z zastosowaniem numeracji **lokalnej**).

4. Błąd aproksymacji

5. Aproksymacja Lagrange'a wyższego stopnia

6. Aproksymacja hierarchiczna wyższego stopnia - $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ liniowe, α_3 minimalizuje $\|u - u_h\|$

7. Funkcje kształtu: liniowo niezależne, jednoznacznie rozwiązywalne (*unisolvant*; wektory $\varphi_1(\mathbf{X}), \varphi_2(\mathbf{X}), \dots, \varphi_n(\mathbf{X})$ są liniowo niezależne $\forall \mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$).

3 Sformułowanie mocne zadania pręta w stanie jednoosiowym

Wprowadzenie do MES będzie przedstawione na przykładzie możliwie prostego zadania modelowego mechaniki jakim jest pręt poddany działaniu jedynie sił działających w kierunku jego osi.

Równań opisujące jednoosiowy stan naprężenia w pręcie czyli zadanie rozciągania albo ściskania pręta łatwo wyprowadzić korzystając z zasady pędu (II zasady dynamiki Newtona) i następujących założeń:

- pręt jest w spoczynku (statyka)
- przemieszczenia i odkształcenia są małe
- materiał pręta jest sprężysty (stosujemy prawo Hooke'a)
- siły międzycząsteczkowe są krótko zasięgowe
- siły objętościowe (masowe) są ciągłe
- $AE = \text{const}$, A - pole przekroju poprzecznego, E - moduł Younga
- istnieją drugie pochodne rozwiązania w każdym punkcie odcinka $(0, l)$

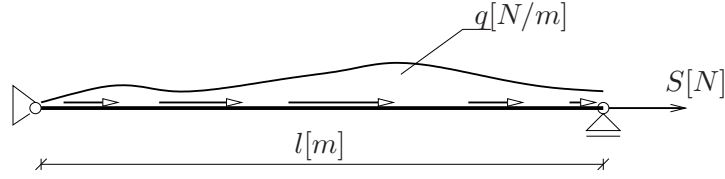


Figure 3: Modelowe zadanie 1D. Pręt w jednoosiowym stanie naprężenia. Tylko siła osiowa może być niezerowa. Pozostałe siły przekrojowe (momenty zginające, skręcające i siły poprzeczne) są równe zero. Przyjmijmy, że oś "x" układu współrzędnych pokrywa się z osią pręta i zaczyna na lewym końcu.

- pręt nie ulega wyboczeniu.

Przy takich założeniach, dla pręta jak na rys. 3 przemieszczenia $u(x)$ przekrojów pręta w kierunku jego osi można obliczyć rozwiązując następujące zagadnienie brzegowe (równanie różniczkowe i warunki brzegowe)

$$\begin{cases} -AEu'' = q & \forall x \in (0, l) \\ u(0) = 0 \\ AEu'(l)n(l) = S \end{cases} \quad (1)$$

gdzie $n(l) = 1$, $n(0) = -1$, obciążenia q, S mają znaki zgodne z przyjętym układem współrzędnych. Jest to sformułowanie mocne, którego cechą jest spełnianie w każdym punkcie obszaru (dziedziny funkcji u czyli odcinka $[0, l]$) pewnego warunku.

4 Sformułowania słabe zadania pręta w stanie jednoosiowym

4.1 Sformułowanie wariacyjne

Metoda elementów skończonych wymaga t.zw. sformułowania słabego. Poniżej przedstawiona jest koncepcja przekształcenia sformułowania mocnego w słabe z pominięciem szczegółów matematycznych.

Pomnóżmy równanie różniczkowe (1)_i obustronnie przez dowolną ciągłą funkcję $v(x)$

$$-vAEu'' = vq \quad \forall v \in V \quad (2)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób nowe równanie albo inaczej pewną funkcję zmiennej x przedstawioną na dwa sposoby: za pomocą drugiej pochodnej niewiadomej funkcji $u(x)$ ($-vAEu''$) oraz za pomocą obciążenia (vq). Zatem całki oznaczone w granicach od 0 do l z wyrażeń po lewej i prawej stronie równania (2) będą równe czyli

$$-\int_0^l vAEu'' dx = \int_0^l vq dx \quad \forall v \in V \quad (3)$$

Po zastosowaniu całkowania przez części do całki po lewej stronie otrzymamy

$$\int_0^l v'AEu' dx - [v(l)AEu'(l) - v(0)AEu'(0)] = \int_0^l vq dx \quad \forall v \in V \quad (4)$$

Problem formulation

Momentum Conservation Principle (Second Newton's Law of Motion)
 → **Equilibrium Equations**

$$A\sigma(x)n_- + \int_x^{x+\Delta x} q(y) dy + A\sigma(x + \Delta x)n_+ = 0 \quad \forall \omega \subset (0, l)$$

$$n_- = -1, \quad n_+ = 1$$

Find $u(x)$ such that:

$A E \frac{du}{dx}(x + \Delta x) - A E \frac{du}{dx}(x) = - \int_x^{x+\Delta x} q(y) dy \quad \forall \omega \subset (0, l) + \text{b.c.} \rightarrow \text{FVM}$

Problem formulation

- Taylor formula: $\exists \xi : \frac{du}{dx}(x + \Delta x) = \frac{du}{dx}(x) + \frac{d^2u}{dx^2}(\xi)\Delta x$ (if u'' exists)
- Mean value theorem: $\exists \eta : \int_x^{x+\Delta x} q(y) dy = q(\eta)\Delta x$ (if q is continuous)
- $\Delta x \rightarrow 0$

Find $u(x) \in C^2([0, l])$ such that:

$$\begin{cases} A E \frac{d^2u}{dx^2} = -q(x) & \forall x \in (0, l) \\ u(0) = 0 \\ A E \frac{du}{dx}(l)n(l) = P \end{cases}$$

→ FDM 28

Funkcje v zwane funkcjami testowymi były do tej pory dowolnymi funkcjami ciągłymi (elementy V). Jeżeli ograniczymy się do funkcji które mają wartość 0 dla $x = 0$ przekształcenie nic nie straci na ogólności, gdyż tych specjalnych funkcji testowych jest wciąż nieskończenie wiele. Natomiast warunek zerowania się funkcji testowej w miejscu w którym rozwiązanie ma znaną wartość na brzegu (spełnia warunek kinematyczny na podporze co w zapisie matematycznym zaznaczamy pisząc, że v należy do przestrzeni V_0) upraszcza w istotny sposób sformułowanie, które po uwzględnieniu warunku statycznego ($AEu'(l) = S$) przyjmuje postać

Znaleźć $u(x)$, $u(0) = 0$ takie, że

$$\int_0^l v' AEu' dx = \int_0^l vq dx + v(l)S \quad \forall v \in V_0 \quad (5)$$

Zauważmy, że kinematyczny warunek brzegowy został przepisany (nazywa się inaczej podstawowym), a statyczny jest uwzględniony po prawej stronie (stąd nazwa naturalny). Sformułowanie (5) jest dobrze znaną z mechaniki zasadą prac wirtualnych. Funkcje v oznaczają przemieszczenia wirtualne (ciągłe i zerujące się na podporach), lewa strona tej zasady to praca sił wewnętrznych na przemieszczeniach wirtualnych a wyrażenie po prawej stronie jest pracą sił zewnętrznych na tych przemieszczeniach wirtualnych. Jest to sformułowanie słabe, gdyż zasada (5) nie zakłada spełniania pewnych warunków w punktach. Jego podstawowe zalety to niższy stopień pochodnej z poszukiwanej funkcji i dobre podstawy matematyczne. Ponadto, okazuje się, że zasada obowiązuje dla zmiennej sztywności AE oraz nieciągłego obciążenia q .

4.2 Problem minimalizacji

Zasadę prac wirtualnych można przekształcić do równoważnej zasady minimum całkowitej energii potencjalnej ($J : V_0 \ni v \rightarrow J(v) \in R$)¹. Dla pręta poddanego przemieszczeniom wirtualnym v wynikająca z tego całkowita energia potencjalna $J(v)$ wyraża się wzorem

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^l v' AEv' dx - \int_0^l vq dx - v(l)S \quad (6)$$

Przemieszczenia osi pręta $u(x)$ są tymi przemieszczeniami wirtualnymi ($v(x)$, $v(0) = 0$) dla których funkcjonal J osiąga minimum czyli

$$J(u) = \min_{V_0} J(v) \quad (7)$$

Podsumowując, przemieszczenia osi pręta można obliczyć rozwiązując zadanie (1) lub (5) lub (7). Wszystkie mają jednoznaczne rozwiązanie przy odpowiednich warunkach brzegowych.

5 Metoda Galerkin

Ze względu na największą ogólność zastosujemy zasadę prac wirtualnych (5) czyli sformułowanie wariacyjne. Przybliżone rozwiązanie ($u_h(x)$) takiego zadania można otrzymać metodą Galerkin, który ponad 100 lat temu zaproponował aby rozwiązanie przybliżone poszukiwać w postaci kombinacji

¹Formalnie dzięki temu, że funkcjonal na pracę sił zewnętrznych na przemieszczeniach wirtualnych (lewa strona (5)) jest symetryczny i dodatnio określony.

liniowej pewnych znanych funkcji bazowych (ciągłych i liniowo niezależnych) $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ czyli

$$u(x) \approx u_h(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x) \quad (8)$$

gdzie α_i są nieznanymi współczynnikami (stopniami swobody). Funkcje bazowe φ_i są również stosowane jako przemieszczenia wirtualne². Przykładowo przyjmując $v = \varphi_1$ mamy pierwsze równanie algebraiczne

$$\int_0^l \varphi_1' AE (\alpha_1\varphi_1' + \alpha_2\varphi_2' + \dots + \alpha_n\varphi_n') dx = \int_0^l \varphi_1 q dx + \varphi_1(l)S \quad (9)$$

Zapisując równanie (5) dla kolejnych funkcji bazowych traktowanych jako funkcje testowe otrzymujemy następujący symetryczny układ n równań algebraicznych z n niewiadomymi

$$\mathbf{G}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (10)$$

gdzie \mathbf{a} jest kolumnowym wektorem niewiadomych stopni swobody $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$,

$$G_{ij} = \int_0^l \varphi_i' AE \varphi_j' dx \quad f_i = \int_0^l \varphi_i q dx + \varphi_i(l)S \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań algebraicznych pozwala obliczyć stopnie swobody, a zetem również funkcję $u_h(x)$ na podstawie wzoru (8).

Taka sama aproksymacja jak w metodzie Galerkina dla zasady minimum funkcjonału (7) prowadzi do metody Ritza, która daje ten sam układ równań algebraicznych (10) co metoda Galerkina. Poprawne sformułowanie zadania i ciągłe funkcje bazowe dają gwarancję zbieżności metody czyli zmniejszanie błędu wraz ze zwiększaniem liczby stopni swobody.

6 Algorytm MES na przykładzie zadania 1D

Metoda elementów skończonych pozwala uzyskiwać przybliżone, ale z kontrolowaną dokładnością, rozwiązania zagadnień brzegowych modelujących zachowanie się rzeczywistych konstrukcji. Jest metodą Galerkina, w której jako funkcji bazowych używa się poznane już wcześniej funkcje kształtu.

W tym rozdziale przedstawiony jest algorytm MES na przykładzie zadania pręta.

1. Sformułowanie zadania

Skorzystamy ze sformułowania wariacyjnego - zasady prac wirtualnych (5). Wiemy, na podstawie analizy funkcjonalnej, że jest to dobrze postawione zadanie, mające jednoznaczne rozwiązanie. Przyjmijmy, że: $L=2$ m, $AE=1000$ kN, $q=10$ kN/m, $S=-3$ kN. Dla wszystkich typowych zadań sformułowania są dobrze znane i użytkownik programów MES nie musi ich podawać.

2. Dyskretyzacja - generacja siatki

Podzielmy odcinek $[0, l]$, w którym poszukiwane jest rozwiązanie na mniejsze odcinki, będące w tym przypadku elementami skończonymi. Jest to t.zw. generacja siatki MES. Załóżmy, że

²Istnieje wersja metody, w której funkcjami testowymi (przemieszczeniami wirtualnymi) są inne funkcje niż przyjmowane do aproksymacji rozwiązania.

zastosujemy 3 elementy skończone³ (rys. 4). Generator siatki dostarcza informacji o współrzędnych węzłów ($x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}l$, $x_3 = \frac{2}{3}l$, $x_4 = l$) i o tym jakie węzły definiują poszczególne elementy skończone. Istotna jest kolejność węzłów przyporządkowanych elementom. Założmy następujące relacje: element 1 ma węzły (1,2), element 2 ma węzły (2,3) i element 3 ma węzły (3,4). Wprowadzony podział czyli dyskretyzacja umożliwia zdefiniowanie funkcji kształtu. Są

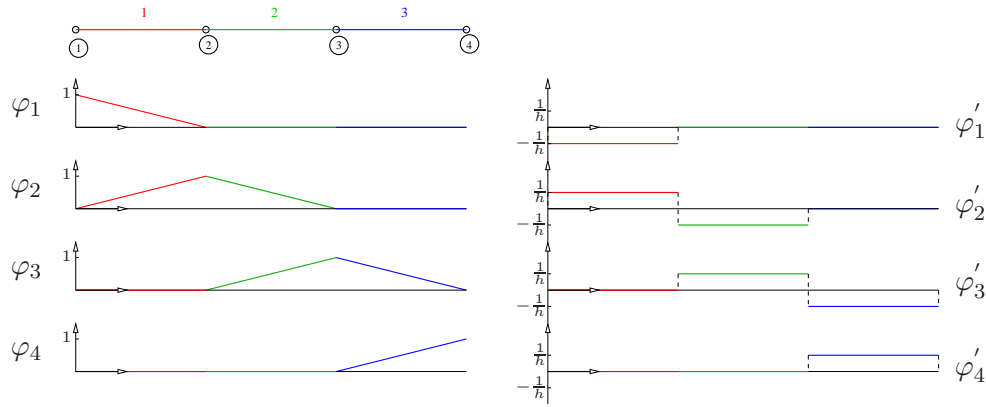


Figure 4: Modelowe zadanie 1D. Dyskretyzacja za pomocą 3 elementów skończonych z wprowadzoną numeracją elementów i węzłów oraz wykresy funkcji kształtu i ich pochodnych. Element 1 ma węzły (1,2), element 2 ma węzły (2,3), a element 3 ma węzły (3,4). Współrzędne węzłów są znane. Oznaczmy je odpowiednio x_1, x_2, x_3, x_4 . Przyjmijmy, że długości elementów są jednakowe i wynoszą $h = \frac{l}{3}$. Wtedy $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}l$, $x_3 = \frac{2}{3}l$, $x_4 = l$.

to funkcje ciągłe (dzięki temu metoda numeryczna jest stabilna czyli mamy gwarancję, że zwiększając liczbę elementów skończonych zmniejszamy błąd aproksymacji MES), przyporządkowane węzłom w taki sposób, że każda z funkcji kształtu przyjmuje wartość 1 w wybranym węźle oraz 0 w pozostałych węzłach. Przyjmijmy, że tak jak na rys. 4 będą to funkcje odcinkowo liniowe (ich wykresami są łamane)⁴. Funkcje kształtu będą funkcjami bazowymi aproksymacji rozwiązania, funkcjami testowymi w metodzie Galerkina oraz funkcjami aproksymującymi brzeg obszaru (w 1D zawsze, w 2D i 3D w wielu przypadkach aproksymacja brzegu jest dokładnym opisem geometrii obszaru).

Aproksymacja MES wyraża się wzorem (8). Dzięki opisanym powyżej właściwościom funkcji kształtu łatwo zauważyć, że

$$u_h(x_1) = \alpha_1 \varphi_1(x_1) + \alpha_2 \varphi_2(x_1) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x_1) = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 = \alpha_1 \quad (12)$$

oraz ogólnie

$$u_h(x_i) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

³W praktyce potrzebnych jest znacznie więcej elementów do uzyskania odpowiedniej dokładności.

⁴Klasyczne pochodne funkcji kształtu nie istnieją w węzłach (prawostronna nie równa się lewo stronnej) ale zarówno pochodne jak i całki w zasadzie wariacyjnej (5) są rozumiane w ogólniejszym sensie i dlatego z matematycznego punktu widzenia wszystko jest poprawnie. Z punktu widzenia mechaniki przemieszczenia mogą być nieładkie (mieć skokową zmianę pochodnej) w miejscu zmiany parametrów materiałowych co ma miejsce np. w kompozytach.

Wprowadzając oznaczenie $u_h(x_i) = u_i$ aproksymację MES przyjmujemy w postaci kombinacji funkcji kształtu ze stopniami swobody będącymi wartościami (na razie nieznanymi) rozwiązania przybliżonego w węzłach

$$u_h(x) = u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) + \dots + u_n\varphi_n(x) \quad (14)$$

Podstawową zaletą funkcji kształtu jako funkcji bazowych jest to że przyjmują wartości niezerowe tylko na niewielkich podobszarach (w elementach związanych z wybranym węzłem). W praktyce, przy dużej liczbie elementów skończonych, podobszary te są bardzo małe w porównaniu z całym obszarem.

W rozważanym przykładzie $n = 4$ i mówimy, że globalna liczba stopni swobody (LSS) jest równa 4.

3. Agregacja

Ponieważ metoda elementów skończonych jest metodą Galerkina układ równań algebraicznych pozwalający obliczyć stopnie swobody ma postać taką jak w rozdziale 5 ale z dodatkową ceną zaletą jaką jest pasmowość (dużo współczynników zerowych).

Przykładowo jeżeli jako funkcji testowej użyjemy pierwszej funkcji kształtu otrzymamy pierwsze równanie algebraiczne

$$\int_0^l \varphi_1' AE (u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3 + u_4\varphi_4)' dx = \int_0^l \varphi_1 q dx + \varphi_1(l)S \quad (15)$$

Ponieważ $\varphi_1'\varphi_3' = \varphi_1'\varphi_4' = 0$, a $\varphi_1'\varphi_1'$ i $\varphi_1'\varphi_2'$ są niezerowe tylko w elemencie pierwszym, powyższe równanie ma postać

$$u_1 \int_{e_1} \varphi_1' AE \varphi_1' dx + u_2 \int_{e_1} \varphi_1' AE \varphi_2' dx + u_3 \cdot 0 + u_4 \cdot 0 = \int_{e_1} \varphi_1 q dx + 0 \cdot S \quad (16)$$

gdzie e_1 oznacza pierwszy element (odcinek $[0, h]$). Następne równia otrzymujemy analogicznie i można je zapisać macierzowo

$$AE \begin{bmatrix} \int_{e_1} \varphi_1' \varphi_1' & \int_{e_1} \varphi_1' \varphi_2' & 0 & 0 \\ \int_{e_1} \varphi_2' \varphi_1' & \int_{e_1} \varphi_2' \varphi_2' + \int_{e_2} \varphi_2' \varphi_2' & \int_{e_2} \varphi_2' \varphi_3' & 0 \\ 0 & \int_{e_2} \varphi_3' \varphi_2' & \int_{e_2} \varphi_3' \varphi_3' + \int_{e_3} \varphi_3' \varphi_4' & \int_{e_3} \varphi_3' \varphi_4' \\ 0 & 0 & \int_{e_3} \varphi_4' \varphi_3' & \int_{e_3} \varphi_4' \varphi_4' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{e_1} \varphi_1 q \\ \int_{e_1} \varphi_2 q + \int_{e_2} \varphi_2 q \\ \int_{e_2} \varphi_3 q + \int_{e_3} \varphi_3 q \\ \int_{e_3} \varphi_4 q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S \end{bmatrix} \quad (17)$$

gdzie dla skrócenia zapisu pominięto pod całkami symbol dx oraz przyjęto, że $AE = \text{const}$, a kolorami oznaczono wkład kolejnych elementów skończonych do (globalnego) układu równań algebraicznych. Podmacierze 2x2 oznaczone poszczególnymi kolorami nazywają się macierzami (sztywności) elementów. Analogicznie podmacierze kolumnowe 2x1 wchodzące w skład wektora prawych stron nazywają się wektorami (obciążenia) elementów. Dla każdego elementu korzystamy w związku z tym jedynie z dwóch funkcji kształtu, gdyż tylko te, które są związane z jego węzłami (rys. 5) nie zerują się w elemencie. Dla tych funkcji stosujemy numerację lokalną: 1,2. Zatem LSS elementu w tym zadaniu i przy tej dyskretyzacji jest równa 2.

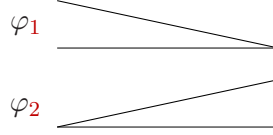


Figure 5: Modelowe zadanie 1D. Lokalnie ponumerowane funkcje kształtu $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ elementu skończonego o węzłach x_1, x_2 (również z zastosowaniem numeracji lokalnej).

Stosując lokalną numerację (nie będzie ona dalej specjalnie oznaczana), współczynniki macierzy (\mathbf{K}^e) i wektora (\mathbf{P}^e) elementu e oblicza się ze wzorów

$$K_{ij}^e = \int_e \varphi'_i A E \varphi'_j dx, \quad P_i^e = \int_e \varphi_i q dx, \quad i, j = 1, 2 \quad (18)$$

Wzory te można uzyskać bezpośrednio, podstawiając funkcje kształtu za funkcje testowe i bazowe do całek po lewej i prawej stronie sformułowania wariacyjnego. Składnik bez całki ($v(l)S$) nie jest związany z żadnym elementem i jest uwzględniany inaczej niż składniki z całkami.

Łatwo obliczyć macierz sztywności dla elementu o długości h (niezależnie od jego położenia na osi x) oraz wektor obciążenia dla stałego obciążenia q

$$\mathbf{K}^e = \frac{AE}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^e = \frac{qh}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Macierz współczynników (\mathbf{K}) i wektor prawych stron (\mathbf{f}) algebraicznego układu równań nazywają się globalną macierzą (sztywności) i globalnym wektorem (obciążenia). Ich współczynniki najwygodniej oblicza się metodą agregacji, element po elemencie⁵. Agregację w następujący sposób.

- Przyjmujemy zerową globalną macierz sztywności $\mathbf{K}_{n \times n}$ i zerowy globalny wektor obciążenia $\mathbf{f}_{n \times 1}$. Ponieważ $n = 4$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

- Kolejno, dla każdego elementu obliczamy macierz i wektor elementowy⁶, a następnie dodajemy ich współczynniki do macierzy i wektora globalnego w miejsca wynikające z numerów globalnych stopni swobody elementu. Numery te są adresami (określają kolumny i wiersze) w macierzy i wektorze globalnym pod które należy "dostarczyć" poszczególne współczynniki macierzy i wektora elementu.

⁵Przykład 1D jest szczególny, gdyż sformułowanie wariacyjne zawiera składnik bez całki, który uwzględnia się na poziomie globalnym, czyli bez agregacji.

⁶W rozważanym przykładzie macierze i wektory wszystkich elementów są takie same (patrz wzory 19).

(a) Element 1 ma węzły (1,2). Po agregacji jego macierzy i wektora

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \frac{qh}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

(b) Element 2 ma węzły (2,3). Po agregacji jego macierzy i wektora

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \frac{qh}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

(c) Element 3 ma węzły (3,4). Po agregacji jego macierzy i wektora

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \frac{qh}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

- W nietypowym zadaniu 1D należy jeszcze dodać wektor z siłą skupioną S przyłożoną w 4-tym węźle (dlatego występuje w 4-tym wierszu), a zatem

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \frac{qh}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S \end{bmatrix} \quad (24)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań algebraicznych

$$\frac{AE}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{qh}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S \end{bmatrix} \quad (25)$$

Przyjmując oznaczenia

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \mathbf{u}, \quad \frac{qh}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S \end{bmatrix} = \mathbf{W} \quad (26)$$

czyli wektory, odpowiednio: stopni swobody, obciążenia i sił węzłowych można zapisać układ równań algebraicznych w zwarty sposób

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P} + \mathbf{W} \quad (27)$$

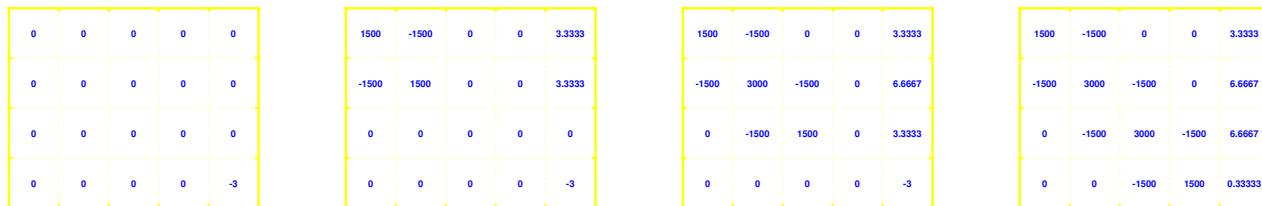


Figure 6: Modelowe zadanie 1D. Przebieg agregacji macierzy sztywności (4x4) i wektora obciążenia (ostatnia kolumna). Wektor sił węzłowych wstawiono na początku agregacji.

Po przyjęciu parametrów zdefiniowanych na początku rozdziału 6, macierz i wektor elementu są równe

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} 1500 & -1500 \\ -1500 & 1500 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} 3.333 \\ 3.333 \end{bmatrix} \quad (28)$$

i agregacja przebiega w sposób pokazany na rys. 6.

4. Uwzględnienie warunków kinematycznych i rozwiązanie układu równań

Macierz układu równań algebraicznych (27) jest osobliwa. Wynika to z nie uwzględnienia do tej pory kinematycznego warunku brzegowego. Z mechaniki wiemy, że bez takich warunków (podpór) układ jest geometrycznie zmienny i analiza statyczna nie umożliwi obliczyć jednoznacznych przemieszczeń. Z matematycznego punktu widzenia warunek kinematyczny, czyli $u(0) = 0$ implikuje, że pierwsza funkcja kształtu nie jest właściwą funkcją testową (przemieszczeniem wirtualnym), a zatem pierwsze równanie w uzyskanym metodą agregacji układzie (27) jest "nielegalne". Zostało ono jednak utworzone celowo, dla uproszczenia algorytmu agregacji ale teraz należy go wyeliminować. Ponieważ znamy przemieszczenie w pierwszym węźle czyli znamy pierwszy stopień swobody u_1 można pomnożyć pierwszą kolumnę macierzy sztywności przez u_1 (gdyby był znany stopień swobody u_k to kolumnę "k") i przenieść otrzymany wektor na prawą stronę⁷. W tym przykładzie $u_1 = 0$ zatem przenoszony wektor jest zerowy, ale nie zawsze tak musi być. Następnie rezygnujemy z pierwszego (w ogólności k-tego) równania. Otrzymujemy w ten sposób układ 3 równań z 3 niewiadomymi

$$\frac{AE}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{qh}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S \end{bmatrix} \quad (29)$$

Numerycznie, uwzględnienie kinematycznych warunków brzegowego wygodniej jest wykonać bez zmiany wymiarów macierzy i wektora układu równań. Po przeniesieniu, jak poprzednio, znanych wyrażeń na prawe strony należy wyzerować k-tą kolumnę (przeniesiona na prawą stronę) i k-ty wiersz ("nielegalne" równanie) macierzy sztywności a następnie wstawić liczbę 1 na przekątną oraz znany stopień swobody na prawą stronę k-tego równania (warunek $u_k =$

⁷Jest to przenoszenie w każdym równaniu znanego wyrażenia na prawą stronę.

$u(x_k)$). W rozważanym przykładzie otrzymamy

$$\frac{AE}{h} \begin{bmatrix} \frac{h}{AE} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{qh}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S \end{bmatrix} \quad (30)$$

Układ równań algebraicznych, w postaci (29) albo (30) jest symetryczny, pasmowy, dodatnio określony i ma jednoznaczne rozwiązanie, które można obliczyć jedną z bezpośrednich albo iteracyjnych metod numerycznych. Dla przyjętych konkretnych danych liczbowych otrzymamy

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0.009111, \quad u_3 = 0.01378, \quad u_4 = 0.01400 \quad [m] \quad (31)$$

5. Wyniki obliczeń

Znając stopnie swobody możemy wrócić do aproksymacji za pomocą funkcji kształtu. Najlepiej stosować ją element po elemencie tak jak to było przy agregacji układu równań. Zatem, każdy element skończony rozważamy indywidualnie, stosując **numerację lokalną** (rys. 5). Wiedząc, na podstawie relacji element-węzły jakie są numery węzłów pobieramy współrzędne tych węzłów (w lokalnej numeracji oznaczamy je x_1, x_2), odczytujemy z globalnego wektora stopni swobody stopnie swobody elementu (oznaczając jako u_1, u_2) i zapisujemy rozwiązanie MES w rozważanym elemencie skończonym

$$u_h^e(x) = u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) = u_1\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + u_2\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad (32)$$

Przykładowo, dla elementu 3, stosując numerację lokalną $x_1 = 1.333$, $x_2 = 2.000$, $u_1 = 0.01378$, $u_2 = 0.01400$, a zatem

$$u_h^{(3)} = x/3000 + 1/75 \quad (33)$$

Możemy teraz obliczyć siłę osiową w każdym elemencie korzystając ze wzoru $N = AEu'$, czyli dla rozwiązania przybliżonego (32), z lokanie ponumerowanymi stopniami swobody u_1, u_2 , zachodzi

$$N_h^e(x) = AE[u_1\varphi_1'(x) + u_2\varphi_2'(x)] = AE\frac{u_2 - u_1}{h} \quad (34)$$

W szczególności, dla elementu 3:

$$N_h^{(3)} = AE\frac{0.01400 - 0.01378}{2/3} = 0.3333 \text{ kN} \quad (35)$$

Tak uzyskane rozwiązanie i siła osiowa, narysowane element po elemencie, są przedstawione na rys. 7.

6. Błąd rozwiązania

Po uzyskaniu rozwiązań ważną rzeczą jest znajomość jego dokładności. Błędy przemieszczeń i siły osiowej definiuje się następująco

$$e_u(x) = u(x) - u_h(x), \quad e_N(x) = N(x) - N_h(x) \quad (36)$$

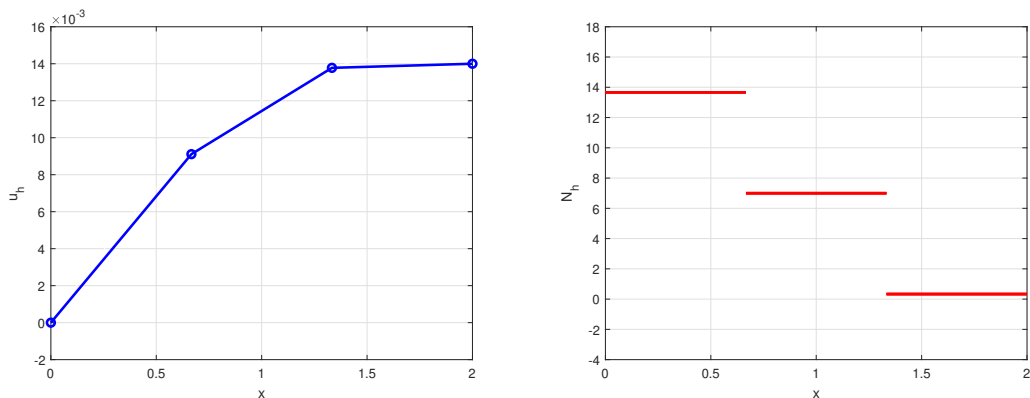


Figure 7: Modelowe zadanie 1D. Wykres rozwiązania MES i obliczonej na jego podstawie siły osiowej.

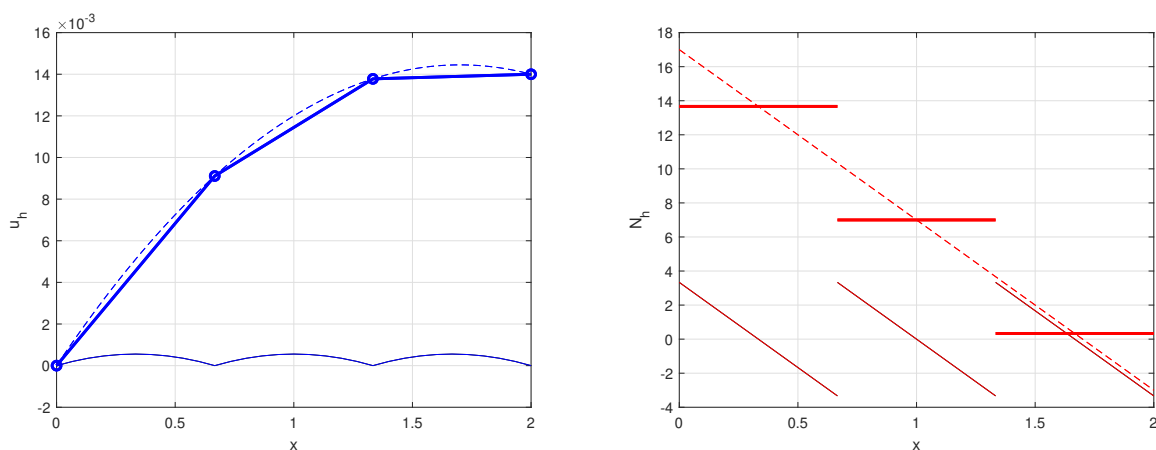


Figure 8: Modelowe zadanie 1D. Wykres rozwiązania MES i obliczonej na jego podstawie siły osiowej (linie grube), dokładne rozwiązanie i siła osiowa (linie kreskowane), błędy rozwiązania i siły osiowej (linie cienkie).

Przykładowe zadanie, które rozwiązujemy za pomocą MES jest bardzo proste i łatwo obliczyć dokładne $u(x)$, $N(x)$. Ich wykresy pokazano linią przerywaną na rys 8. Zamieszczono tam również wykresy błędów $e_u(x)$, $e_N(x)$. W rzeczywistości MES stosujemy wtedy, kiedy nie znamy rozwiązania dokładnego. Dlatego w praktyce możliwe jest jedynie oszacowanie błędów obliczeń. Metody oszacowania błędów bez znajomości rozwiązania dokładnego będą przedstawione w dalszej części wykładu.

Warto zauważyć, że przemieszczenia są ciągłe i dokładne w węzłach siatki MES, natomiast siła osiowa jest odcinkowo ciągła i dokładna w środkach elementów. Dokładne przemieszczenia w węzłach wynikają ze szczególnych cech zadań 1D. W ogólności obserwujemy, że rozwiązanie MES ma najmniejszy błąd w węzłach a naprężenia w pewnych punktach wewnątrz elementów. Błąd naprężeń (sił) jest na ogół większy od błędów przemieszczeń. Często, a zwłaszcza dla układów prętowych stosuje się specjalne opracowanie wyników, które pozwala obliczyć dokładne wartości sił przekrojowych układów prętowych w węzłach siatki MES (zamiast skokowej ich

zmiany pomimo braku obciążenia skupionego) albo poprawić dokładność obliczonych naprężeń.

W przedstawionym powyżej algorytmie można wyróżnić trzy charakterystyczne etapy obliczeń: *preprocesor* (punkty 1,2) - sformułowanie zadania, przyjęcie danych, generacja siatki MES i struktury danych, *procesor* (punkty 3,4) - utworzenie i rozwiązanie układu równań algebraicznych, zapamiętanie wyniku, *postprocesor* (punkty 5,6) - przedstawienie wyników (przemieszczeń) obliczenie pochodnych (naprężeń), oszacowanie błędu obliczeń.

Algorytm MES został zilustrowany prostym zadaniem mechaniki. Jednak interpretacja fizyczna nie miała żadnego znaczenia. Istotny był typ rozważanego równania różniczkowego ($-AEu'' = q$), które można zastąpić np., bardzo podobnym $-AkT'' = f$, modelującym stacjonarny przepływ ciepła ($T(x)$ oznacza rozkład temperatury, k jest współczynnikiem przewodzenia ciepła, a f intensywnością źródła ciepła) i algorytm metody pozostanie identyczny. Dlatego, **MES jest metodą aproksymacji rozwiązań równań różniczkowych, a równania te są matematycznymi modelami zjawisk fizycznych**. Warto o tym pamiętać, zwłaszcza przy ocenie wiarygodności wyników obliczeń.

7 MES dla stacjonarnego przepływu ciepła w 2D

W rozdziale omówione jest zastosowanie metody elementów skończonych do rozwiązania równania Laplace'a w obszarze 2D. Równanie to może opisywać przepływ ciepła w ciałach stałych, gdzie zjawisko to odbywa się na zasadzie przewodzenia inaczej dyfuzji⁸. Dodatkowo założymy, że mamy do czynienia z procesem ustalonym, a więc sytuacją, gdy temperatura nie zmienia się w czasie. Zależy jedynie od położenia (współrzędnych przestrzennych) punktu i dla uproszczenia tylko od dwóch współrzędnych. Będziemy zatem poszukiwać funkcji dwóch zmiennych o wartościach skalarnych.

Równaniami opisującymi rozkład temperatury $T(x, y)$ przy stacjonarnym przepływie ciepła w ciele stałym są: zasada zachowania energii dla układów termodynamicznych

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = Q \quad (37)$$

oraz prawo Fouriera jako najprostsze prawo konstytutywne, które dla materiału izotropowego ma postać

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (38)$$

gdzie $\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}$, $\nabla T = \left[\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right]$, \mathbf{q} jest strumieniem ciepła $[\frac{W}{m^2}]$, ściślej natężeniem strumienia, którego wartość $q = \lim_{A, t \rightarrow 0} \frac{Q}{At}$ (ilość ciepła przepływającego przez daną powierzchnię podzielona przez pole tej powierzchni i czas przepływu), Q oznacza intensywność źródła ciepła $[\frac{W}{m^3}]$, która może być dodatnia (ogrzewanie) albo ujemna (chłodzenie), k jest parametrem materiałowym zwanym współczynnikiem przewodzenia ciepła (przykładowo $k=0.8 \frac{W}{m \text{ deg}}$ dla betonu, $k=50 \frac{W}{m \text{ deg}}$ dla stali). W ogólności, np. w ciałach anizotropowych, wektor \mathbf{q} nie jest współliniowy z gradientem temperatury i właściwości materiału są opisywane za pomocą macierzy, która w najprostszym przypadku, dla przyjętego tu materiału jednorodnego izotropowego ($\mathbf{q} \parallel \nabla T$) ma postać

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad (39)$$

⁸Inne formy przepływu ciepła, które są opisywane innymi równaniami to konwekcja i promieniowanie.

Wstawiając równanie (38) do równania (37) i uzupełniając je o warunki brzegowe mamy sformułowanie mocne zadania stacjonarnego przepływu ciepła w ciałach stałych: *znaleźć temperaturę $T(x,y)$ w obszarze Ω (rys. 9), taką że*

$$\begin{cases} -k\Delta T = Q & \text{w } \Omega \\ T = \hat{T} & \text{na } \partial\Omega_T \\ k\frac{\partial T}{\partial n} = \hat{g} & \text{na } \partial\Omega_q \end{cases} \quad (40)$$

gdzie $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$, $\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T_x}{\partial x} n_x + \frac{\partial T_y}{\partial y} n_y$, n_x, n_y są składowymi wektora ($\sqrt{n_x^2 + n_y^2} = 1$) prostopadłego do brzegu, skierowanego na zewnątrz, \hat{g} jest wartością składowej normalnej strumienia ciepła na brzegu, mającą znak dodatni jeżeli ciepło dopływa do ciała (analogicznie jak dla Q). Czyli $\hat{g} = -\hat{q} \cdot \mathbf{n}$

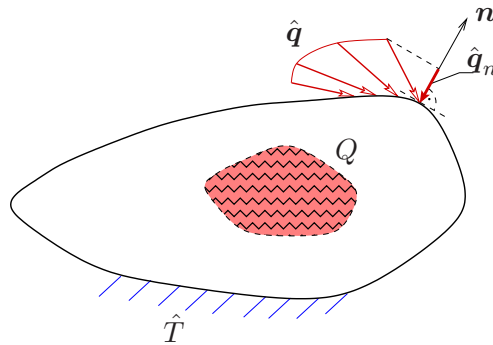


Figure 9: Oznaczenia stosowane w zadaniu stacjonarnego przewodzenia ciepła. Q - źródło ciepła wewnątrz ciała (*ma wartość dodatnią gdy ciepło dopływa*), \hat{T} - znana temperatura na części brzegu, \hat{q} - znany strumień na części brzegu, \hat{q}_n - składowa normalna strumienia na brzegu (narysowana w jednym punkcie ale jest dana na całej części brzegu, na której nie jest znana temperatura, $g = -q_n$ *ma wartość dodatnią gdy ciepło dopływa*), \mathbf{n} - wektor normalny na brzegu.

Aby przekształcić powyższe sformułowanie do postaci słabej potrzebnej w MES należy pomnożyć obie strony równania (40) przez funkcję testową i wyciąkać przez części. Otrzymamy w ten sposób odpowiednik zasady prac wirtualnych: *znaleźć $T(x,y)$, takie że $T = \hat{T}$ na $\partial\Omega_T$ i*

$$\int_{\Omega} k \nabla v \cdot \nabla T \, d\Omega = \int_{\Omega} v Q \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_q} v \hat{g} \, ds \quad \forall v : v = 0 \text{ na } \partial\Omega_T \quad (41)$$

Temperatura znana na części brzegu jest odpowiednikiem warunku kinematycznego i ze względu na to, że występuje poza zasadą wariacyjną nazywa się warunkiem podstawowym (albo Dirichleta), natomiast znana składowa normalna strumienia jest wbudowana w funkcjonal i nosi nazwę warunku naturalnego (Neumanna). Tak jak to było w zadaniu pręta można sformułowanie wariacyjne (41) zastąpić zadaniem minimalizacji pewnego funkcjonału.

Rozważmy zadanie przykładowe, którym jest przepływ ciepła w pryzmatycznym pręcie z ustaloną stałą w czasie i przestrzeni temperaturą na jednej części poboczniczy oraz stałym strumieniem ciepła

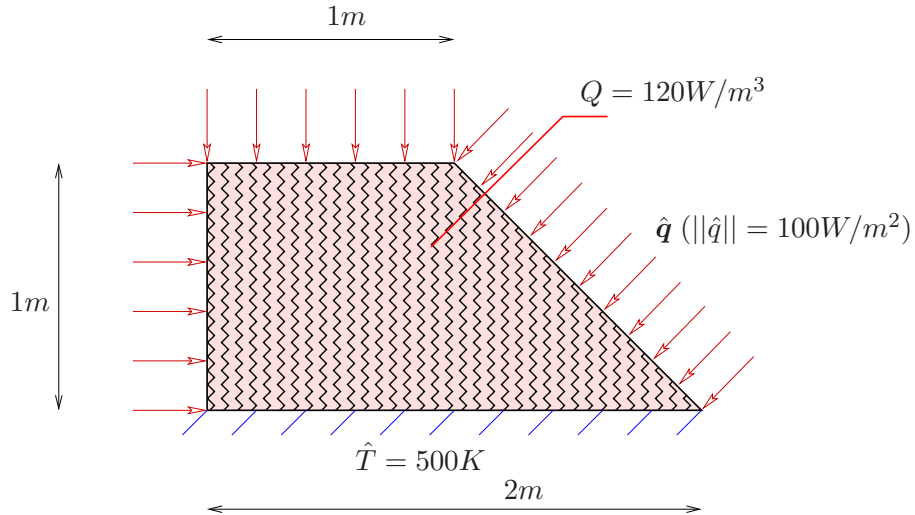


Figure 10: Przykładowe zadanie 2D. Stacjonarny przepływ ciepła. Współczynnik przewodzenia ciepła $k = 1 \frac{W}{m \text{ deg}}$.

na pozostałej części pobocznicy. Można zatem rozważać tylko jeden przekrój pręta. Przyjmijmy, że jest to trapez przedstawiony na rys. 10 z przedstawionymi tam warunkami brzegowymi i źródłem.

Zastosowanie MES do aproksymacji rozwiązania powyższego zadania można uzyskać w poniżej opisanych, poznanych na przykładzie zadania 1D, etapach.

1. Sformułowanie zadania

Skorzystamy ze sformułowania wariacyjnego (41). Wiemy, na podstawie analizy funkcjonalnej, że jest to dobrze postawione zadanie, mające jednoznaczne rozwiązanie.

2. Dyskretyzacja - generacja siatki

Elementy skończone w 2D mogą być trójkątami albo czworokątami, w ogólności o krzywoliniowych bokach. Przyjęty w przykładowym zadaniu obszar w kształcie trapezu podzielmy na 3 przystające trójkąty prostokątne, równoramienne, będące elementami skończonymi. Generator siatki dostarcza informacji o współrzędnych węzłów: $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$ i o tym jakie węzły definiują poszczególne elementy skończone. Istotna jest kolejność węzłów przyporządkowanych elementom. Załóżmy następujące relacje: element 1 ma węzły $(1, 2, 4)$, element 2 ma węzły $(4, 3, 1)$ i element 3 ma węzły $(3, 4, 5)$. Wprowadzony podział czyli dyskretyzacja umożliwia zdefiniowanie funkcji kształtu. Są to funkcje ciągłe (dzięki temu MES jest stabilna czyli mamy gwarancję, że zwiększając liczbę elementów skończonych zmniejszamy błąd aproksymacji), przyporządkowane węzłom w taki sposób, że każda z funkcji kształtu przyjmuje wartość 1 w wybranym węźle oraz 0 w pozostałych węzłach. W rozważanym przykładzie każdy element ma 3 stopnie swobody a globalna ich liczba (LSS) jest równa 5. Na rys. 12 pokazano wykres funkcji kształtu związanej z węzłem nr. 1.

3. Agregacja

Stosując lokalną numerację, współczynniki macierzy (\mathbf{K}^e) i wektora (\mathbf{f}^e) elementu e oblicza

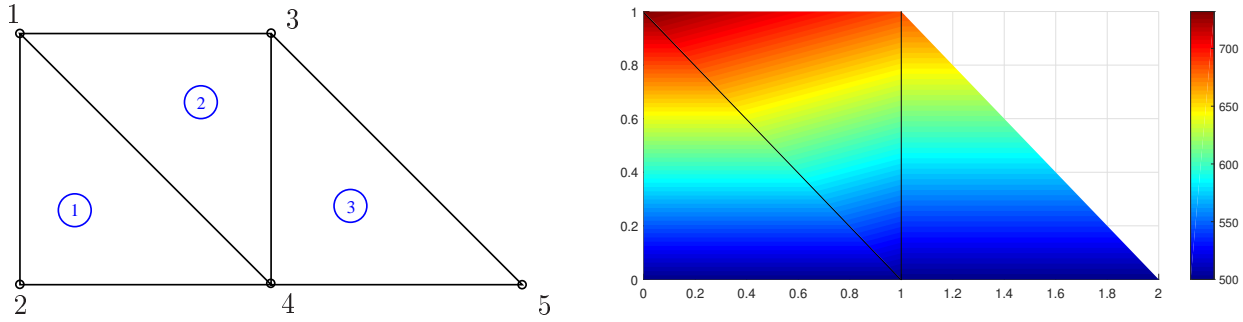


Figure 11: Przykładowe zadanie 2D. Dyskretyzacja i pole temperatury obliczone za pomocą MES dla 3 elementów skończonych.

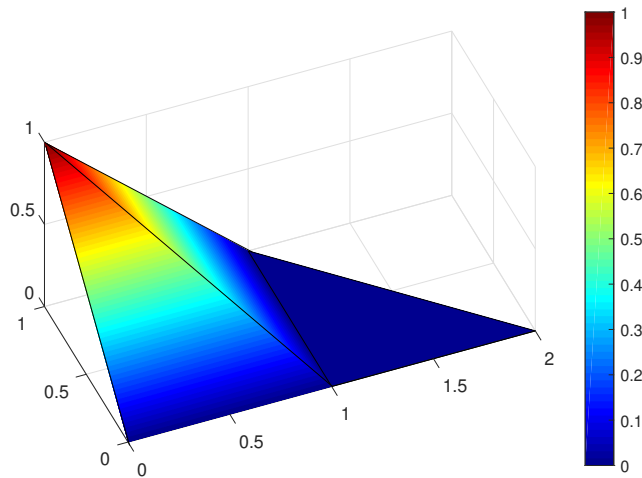


Figure 12: Przykładowe zadanie 2D. Wykres funkcji kształtu związanej z węzłem nr.1 (1/4 piramidy).

się ze wzorów

$$K_{ij}^e = \int_e k \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\Omega, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (42)$$

$$f_i^e = \int_e \varphi_i Q \, d\Omega + \int_{\partial e \cap \partial \Omega_q} \varphi_i \hat{g} \, ds \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (43)$$

gdzie $\partial e \cap \partial \Omega_q$ jest częścią brzegu elementu leżącą na "obciążonym" (q_n jest znane) fragmencie brzegu całego obszaru.

Warto zauważyć, że nie ma po prawej stronie zasady wariacyjnej składnika bez całki, a zatem w globalnym wektorze obciążenia nie będzie składnika obliczanego poza agregacją czyli odpowiednika wektora \mathbf{W} układu równań algebraicznych (27). Wektory obciążenia są w ogólności wynikami całkowania nie tylko po wnętrzu elementu, jak to było w zadaniu 1D, ale również mogą wymagać całkowania po części brzegu $\partial \Omega_q$.

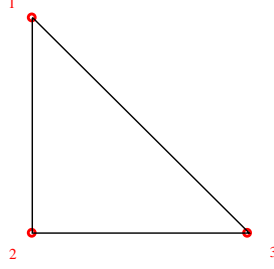


Figure 13: Przykładowe zadanie 2D. Element nr. 1 z lokalnie ponumerowanymi węzłami.

Zajmijmy się elementem 1 (rys. 13). Przyjmując układ współrzędnych w węźle 2, łatwo napisać następujące wzory na ponumerowane lokalnie funkcje kształtu

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= y \\ \varphi_2(x, y) &= 1 - x - y \\ \varphi_3(x, y) &= x\end{aligned}\tag{44}$$

Ogólnie, funkcja przyjmująca wartość 1 w węźle o współrzędnych (x_k, y_k) i zerująca się w węzłach o współrzędnych (x_i, y_i) , (x_j, y_j) może być zapisana wzorem $\varphi_k = \frac{A_k x + B_k y + C_k}{A_k x_k + B_k y_k + C_k}$, gdzie A_k, B_k, C_k są współczynnikami równania prostej ($A_k x + B_k y + C_k = 0$) przechodzącej przez punkty (x_i, y_i) , (x_j, y_j) . Gradienty funkcji kształtu, występujące we wzorach na współczynniki macierzy sztywności, są następującymi wektorami niezależnymi od x, y

$$\begin{aligned}\nabla\varphi_1 &= [0, 1] \\ \nabla\varphi_2 &= [-1, -1] \\ \nabla\varphi_3 &= [1, 0]\end{aligned}\tag{45}$$

Zatem łatwo obliczyć, że dla $k = const$

$$\begin{aligned}K_{11}^e &= k \int_e [0, 1] \cdot [0, 1] dx dy = k \int_e (0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) dx dy = kA \\ K_{12}^e &= k \int_e [0, 1] \cdot [-1, -1] dx dy = -kA \\ K_{13}^e &= k \int_e [0, 1] \cdot [1, 0] dx dy = 0 \\ K_{22}^e &= k \int_e [-1, -1] \cdot [-1, -1] dx dy = 2kA \\ &\dots\end{aligned}\tag{46}$$

gdzie A jest polem elementu skończonego. Macierze wszystkich elementów przy zastosowanej dyskretyzacji (trójkąty przystające, z węzłami ponumerowanymi tak aby węzeł przy kącie prostym był drugi) są jednakowe i równe⁹

$$\mathbf{K}^e = kA \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\tag{47}$$

⁹Elementy skończone mogą być dowolnymi trójkątami albo czworokątami. Łatwo dla nich uogólnić stosowaną w tym prostym obliczeniowo przykładzie metodę obliczania współczynników macierzy i wektorów elementowych.

Agregację układu równań algebraicznych przeprowadzimy podobnie jak w zadaniu 1D, element po elemencie, w następujący sposób.

- Przyjmujemy zerową globalną macierz sztywności $\mathbf{K}_{n \times n}$ i zerowy globalny wektor obciążenia $\mathbf{f}_{n \times 1}$. Ponieważ $n = 5$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

- Kolejno, dla każdego elementu w t.zw. procedurze elementowej oblicza się macierz (w tym przykładzie już obliczona) i wektor elementu. Ich współczynniki dodajemy do macierzy i wektora globalnego w miejsca wynikające z numerów globalnych stopni swobody elementu. Numery te są adresami (określają kolumny i wiersze) w macierzy i wektorze globalnym pod które należy "dostarczyć" poszczególne współczynniki macierzy i wektora elementu.

- (a) Współczynniki wektora elementu (wzór (43)) są w ogólności sumami całek po wnętrzu i części jego brzegu. Obliczmy kolejno potrzebne całki pamiętając, że $Q = 120 = \text{const}$, $q_n = 100 = \text{const}$ ¹⁰

$$\begin{aligned} \int_e \varphi_1 Q \, dx \, dy &= \int_e \varphi_2 Q \, dx \, dy = \int_e \varphi_3 Q \, dx \, dy = \frac{1}{3} A Q = 20 \\ \int_0^1 \varphi_1 \hat{g} \, dy &= \frac{1}{2} \hat{g} = 50 \\ \int_0^1 \varphi_2 \hat{g} \, dy &= \frac{1}{2} \hat{g} = 50 \\ \int_0^1 \varphi_3 \hat{g} \, dy &= 0 \end{aligned} \quad (49)$$

a zatem wektor obciążenia elementu 1 jest równy

$$\mathbf{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} 20 + 50 \\ 20 + 50 \\ 20 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 70 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Element 1 ma węzły (1,2,4). Po agregacji jego macierzy i wektora

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 70 \\ 70 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

¹⁰ $\int_e \varphi_1 \, dx \, dy$ jest równa objętości ostrosłupa jaki tworzy wykres funkcji φ_1 (rys. 12), a $\int_0^1 \varphi_1 \, dx$ jest równa polu trójkąta jaki tworzy wykres tej funkcji na odcinku pomiędzy węzłami 1 i 2.

(b) Podobnie obliczamy wektor obciążenia elementu 2

$$\mathbf{f}^{(2)} = \begin{bmatrix} 20 + 0 \\ 20 + 50 \\ 20 + 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \\ 70 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Element 2 ma węzły (4,3,1). Po agregacji jego macierzy i wektora

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 140 \\ 70 \\ 70 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

(c) Wektor obciążenia elementu 3 jest równy

$$\mathbf{f}^{(3)} = \begin{bmatrix} 20 + 71 \\ 20 + 0 \\ 20 + 71 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91 \\ 20 \\ 91 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Element 3 ma węzły (3,4,5). Po agregacji jego macierzy i wektora

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 140 \\ 70 \\ 161 \\ 60 \\ 91 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań algebraicznych

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 70 \\ 161 \\ 60 \\ 91 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Przyjmując oznaczenia

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \mathbf{u}, \quad \begin{bmatrix} 140 \\ 70 \\ 161 \\ 60 \\ 91 \end{bmatrix} = \mathbf{f} \quad (57)$$

czyli wektory stopni swobody i obciążenia można zapisać układ równań algebraicznych w zwarty sposób

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (58)$$

4. *Uwzględnienie warunków podstawowych i rozwiązanie układu równań*

Ponieważ $T_2 = T_4 = T_5 = 500$, mnożymy odpowiadające tym stopniom swobody kolumny macierzy sztywności przez znane wartości i przenosimy na prawą stronę. Następnie rezygnujemy z równań 2,4,5 zastępując je równaniami $T_2 = 500, T_4 = 500, T_5 = 500$ co prowadzi do układu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 390 \\ \mathbf{500} \\ 661 \\ \mathbf{500} \\ \mathbf{500} \end{bmatrix} \quad (59)$$

którego rozwiązaniem są

$$T_1 = 732, \quad T_2 = 500, \quad T_3 = 685, \quad T_4 = 500, \quad T_5 = 500 \quad [K] \quad (60)$$

5. *Wyniki obliczeń*

Znając stopnie swobody, które przy zastosowanych funkcjach kształtu są wartościami rozwiązania przybliżonego w węzłach można opracować wyniki element po elemencie. Wiedząc, na podstawie relacji element-węzły jakie są numery węzłów pobieramy współrzędne tych węzłów oraz stopnie swobody elementu (oznaczając je z zastosowaniem lokalnej numeracji T_1, T_2, T_3) i zapisujemy rozwiązanie MES w rozważanym elemencie skończonym

$$T_h^e(x) = T_1\varphi_1(x, y) + T_2\varphi_2(x, y) + T_3\varphi_3(x, y) \quad (61)$$

Przykładowo, dla elementu 1, stosując numerację lokalną $T_1 = 732, T_2 = 500, T_3 = 500$, a zatem

$$T_h^{(1)}(x, y) = 732y + 500(1 - x - y) + 500x = 232y + 500 \quad (62)$$

Stosując prawo Fouriera możemy obliczyć strumień ciepła w tym elemencie

$$\mathbf{q}_h^{(1)} = -k\nabla T_h^{(1)} = [0, -232] \quad (63)$$

Wektory \mathbf{q}_h są stałe w elementach i nieciągłe między nimi. Podobnie można obliczyć $\mathbf{q}_h^{(2)} = [47, -185]$ i $\mathbf{q}_h^{(3)} = [0, -185]$. Wykres ciągłego pola temperatury pokazano na rys. 11b, a wektory strumienia ciepła obliczonego na podstawie przyjętej bardzo zgrubnej dyskretyzacji na rys. 14.

6. *Wiarygodność wyników*

Zastosowana dyskretyzacja była bardzo zgrubna. Aby oszacować błąd uzyskanych wyników należałoby powtórzyć obliczenia z przynajmniej dwa razy mniejszymi elementami co dałoby ok. 4 x więcej stopni swobody. Porównanie tak uzyskanego wyniku z przedstawionym powyżej dałoby informację o błędzie tego pierwszego rozwiązania. Na rys. 15 porównano wyniki uzyskane przy 5 i 120 stopniach swobody. Ponieważ rozwiązanie jest dość wolno zmieniającą się funkcją oba wyniki nie różnią się znacznie.

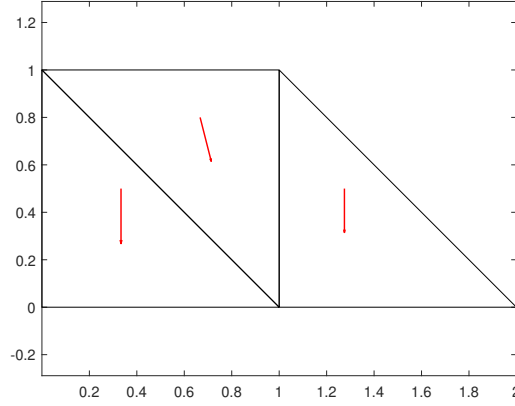


Figure 14: Przykładowe zadanie 2D. Wektory intensywności strumienia ciepła obliczone za pomocą MES dla 3 elementów skończonych.

Na zakończenie tego rozdziału warto wspomnieć, że stosowane tu równanie Laplace'a (ściślej Poisson'a) modeluje również inne zjawiska niż stacjonarny przepływ ciepła. Przykładowo, zamiast temperatury pozwala obliczyć ustalone stężenie substancji w zjawisku dyfuzji, potencjał elektryczny wywołany ładunkiem elektrostatycznym, ugięcia membrany (naciągniętego płótna) od obciążenia prostopadłego do jej powierzchni, deformację przekroju pręta pryzmatycznego poddanego skręcaniu.... **Dla wszystkich tych zadań MES pozostaje bez zmian**, gdyż wszystkie wspomniane zjawiska są opisywane takim samym równaniem.

8 MES dla liniowej sprężystości

Najczęściej rozwiązywanym zadaniem przy projektowaniu konstrukcji jest statyka ciał sprężystych. Dlatego zajmijmy się wybranymi szczegółami zastosowania MES do tego typu zadań. Zaczniemy od sformułowania matematycznego znanego z mechaniki pozwalającego obliczyć niezmiennie w czasie przemieszczenia $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, odkształcenia $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$ i naprężenia $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ w zakresie liniowym, przy zerowym przyspieszeniu, gdzie \mathbf{x} oznacza wektor współrzędnych przestrzennych punktu

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{q} & w \ \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} & w \ \Omega \\ \boldsymbol{\epsilon} = \operatorname{sym}(\nabla\mathbf{u}) & w \ \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & na \ \partial\Omega_u \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} & na \ \partial\Omega_t \end{cases} \quad (64)$$

\mathbf{q} , $\hat{\mathbf{t}}$ są znanymi obciążeniami wewnątrz i na brzegu, \mathbf{C} oznacza tensor parametrów materiałowych reprezentowany przez 4 wskaźnikową macierz (zwaną czasem skrótowo macierzą *szytywności*), \mathbf{n} jest skierowanym na zewnątrz wersorem prostopadłym do brzegu (rys. 16). Sformułowaniem słabym zadania sprężystości może być zasada prac wirtualnych: *znaleźć $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, takie że $\mathbf{u} = 0$ na $\partial\Omega_u$ i*

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, ds \quad \forall \mathbf{v} : \mathbf{v} = 0 \text{ na } \partial\Omega_u \quad (65)$$

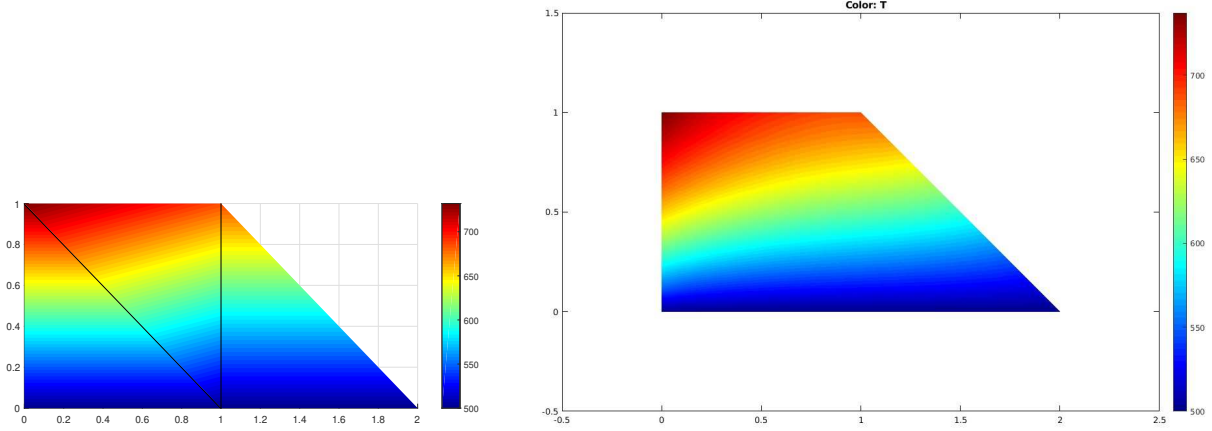


Figure 15: Przykładowe zadanie 2D. Rozwiązania MES uzyskane przy 5 i 120 stopniach swobody. Maksymalne temperatury różnią się o mniej niż 1 % ale rozkłady temperatur wewnątrz obszaru wykazują większe różnice.

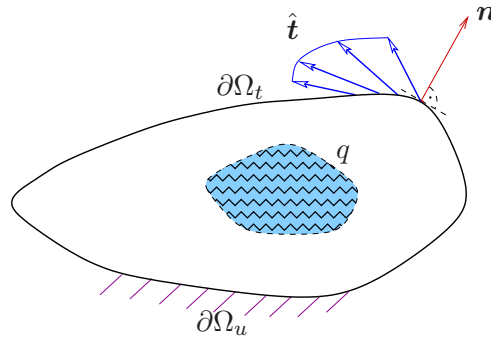


Figure 16: Oznaczenia stosowane w zadaniu sprężystości, 2D. q - obciążenie wewnątrz ciała, $\hat{\mathbf{t}}$ - znane obciążenie powierzchniowe na brzegu, \mathbf{n} - wektor normalny na brzegu.

Problem (65) może być sformułowany również jako minimum funkcjonału, t.zn. *znaleźć* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{u} = 0$ na $\partial\Omega_u$, *takie że*

$$J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v}: \mathbf{v}=0 \text{ na } \partial\Omega_u} J(\mathbf{v}) \quad (66)$$

gdzie J jest całkowitą energią potencjalną układu

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, ds \quad (67)$$

Podstawową cechą zadania mechaniki jest fakt że niewiadoma funkcja przyjmuje wartości wektorowe. Zastanówmy się jak może wyglądać aproksymacja rozwiązania którym są tutaj przemieszczenia mające w ogólności trzy składowe u_x, u_y, u_z . Dla uproszczenia zajmijmy się płaskim stanem odkształcenia, będącego dobrym modelem dla obiektów pryzmatycznych z obciążeniem i podparciem niezależnym od położenia w kierunku osi obiektu (np. mur oporowy)¹¹. Ponownie zajmijmy się

¹¹Płaski stan naprężenia analizuje się w bardzo podobny sposób i ma zastosowanie do obiektów o małym jednym wymiarze (grubości), np. ścian.

najprostszym elementem trójkątnym. Potrafimy dla niego skonstruować skalarne funkcje kształtu związane z trzema wierzchołkami. Możemy je teraz zastosować do aproksymacji każdej składowej przemieszczenia w następujący sposób

$$\mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} u_4 + \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ 0 \end{bmatrix} u_5 + \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} u_6 \quad (68)$$

Zatem oznaczając wektory z funkcjami kształtu literami \mathbf{N}_i , t.zn.

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \quad (69)$$

aproksymacja w zwartej postaci ma postać

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N}_1 u_1 + \mathbf{N}_2 u_2 + \dots + \mathbf{N}_6 u_6 \quad (70)$$

gdzie stopnie swobody u_1, u_3, u_5 mają interpretację poziomych składowych przemieszczeń węzłów, a u_2, u_4, u_6 są poziomymi składowymi (rys. 17).

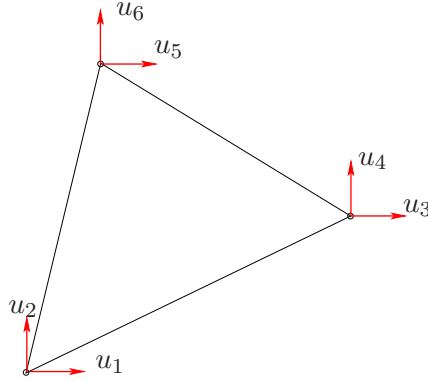


Figure 17: Stopnie swobody elementu trójwęzłowego dla zadania sprężystości.

Stosując lokalną numerację **stopni swobody**, współczynniki macierzy sztywności (\mathbf{K}^e) i wektora obciążenia (\mathbf{f}^e) elementu e oblicza się, na podstawie sformułowania (65), ze wzorów

$$K_{ij}^e = \int_e \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{N}_i) : \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{N}_j) d\Omega, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (71)$$

$$f_i^e = \int_e \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{q} d\Omega + \int_{\partial e \cap \partial \Omega_t} \mathbf{N}_i \cdot \hat{\mathbf{t}} ds \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (72)$$

gdzie n oznacza liczbę stopni swobody elementu (6 na rys. 17), $\partial e \cap \partial \Omega_t$ jest częścią brzegu elementu leżącą na obciążonym (obciążenie rozłożone $\hat{\mathbf{t}}$ jest znane) fragmencie brzegu całego obszaru.

Obliczanie macierzy i wektorów elementowych obliczane są w ogólności numerycznie, z zastosowaniem kwadratury Gaussa. Zajmijmy się jedynie obliczaniem współczynników wektora obciążenia. Załóżmy, że analizujemy płaski stan odkształcenia w obszarze 2D pokazany na rysunku 18. Jest to ćwiartka koła o promieniu długości 1. Lewa krawędź jest zamocowana a jedynym obciążeniem jest liniowo zmieniające się obciążenie na górnej krawędzi. Przyjmijmy dyskretyzację za

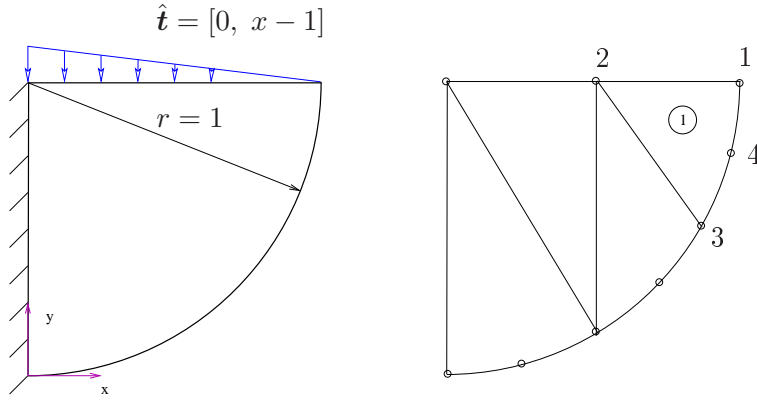


Figure 18: Przykładowy obszar 2D i jego dyskretyzacja za pomocą 4 elementów skończonych z wyróżnionym cztero węzłowym elementem nr. 1. Węzeł 2 jest w połowie długości górnej krawędzi.

pomocą czterech elementów skończonych pokazanych na rysunku 18b z wyróżnionym elementem nr. 1. Ze względu na to że jedna z krawędzi tego elementu jest krzywoliniowa, dobrze jest wprowadzić na niej dodatkowy węzeł w celu lepszego przybliżenia geometrii. Przyjmijmy numerację węzłów jak na rysunku. Dla uproszczenia numeracja lokalna pokrywa się z numeracją globalną dla elementu 1.

Wzory na funkcje kształtu dla takiego elementu są skomplikowane (w praktyce niepotrzebne). W rozważanym przykładzie, dla elementu 1 skorzystamy ze wzorów na funkcje kształtu wzdłuż krawędzi 1-2. Skalarne funkcje kształtu na tej krawędzi są równe

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \frac{x-1/2}{1-1/2} = 2x - 1 \\
 \varphi_2 &= \frac{x-1}{1/2-1} = 2(1-x) \\
 \varphi_3 &= 0 \\
 \varphi_4 &= 0
 \end{aligned} \tag{73}$$

Zatem niezerowe na odcinku 1-2 wektorowe funkcje kształtu to

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \tag{74}$$

Ponieważ obciążenie na krawędzi 1-2 ma kierunek pionowy to niezerowe iloczyny skalarne tego obciążenia i funkcji \mathbf{N}_i są niezerowe jedynie dla $\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_4$ mamy zatem

$$\mathbf{f}^e = \int_{1/2}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ (2x-1) \\ 0 \\ 2(1-x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (x-1) dx = -\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{75}$$

Rozwiązanie powyższego zadania przy ok. 4400 stopniach swobody pokazano na rys. 19.

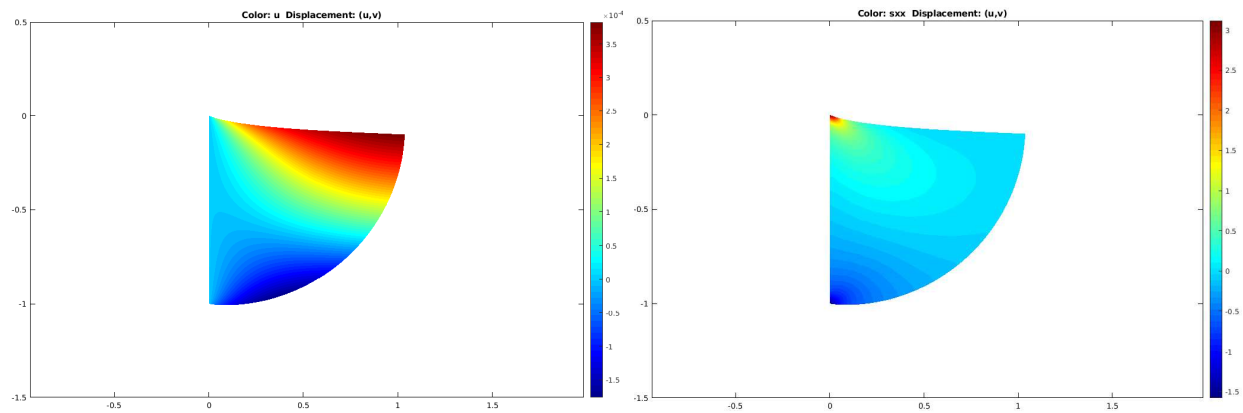
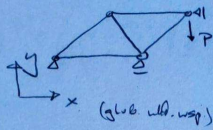


Figure 19: Przykładowy obszar 2D i rozwiązanie (u_x, σ_{xx}) uzyskane za pomocą ok. 4400 stopni swobody dla bezwymiarowych $E=1000$, $\nu=0.3$.

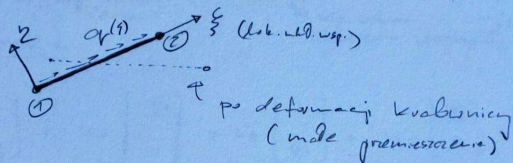
9 Analiza kratownic za pomocą MES

Kratownice (MES)

(T1)



1) Sformułowane dla pojedynczego pręta δ_i ("szkielet")



mocne, uł. lokalne

$$-AE u_i'' = q_i$$

+ war. ciągłości
+ war. podporowe

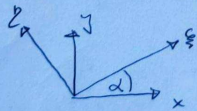
$$u_i'' = 0 \text{ (pręt pozostaje prosty)}$$

$u_1 = u_1(\xi)$
 $u_2 = u_2(\xi)$
 $q_i = q_i(\xi)$

Slabe, uł. globalne

$$\sum_i AE \int_{\delta_i} v_i' u_i' d\xi = \sum_i \int_{\delta_i} v_i q_i d\xi + \sum_i v_i AE u_i \Big|_0^L \quad \forall v$$

• Transformacje układu współ.



$c = \cos \alpha$
 $s = \sin \alpha$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_X \\ u_Y \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{u_x}_{\xi} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} u_X \\ u_Y \end{bmatrix}}_{\xi} = \underbrace{\xi}_{\xi} = \underbrace{u_X}_{\xi} \underbrace{T^T}_{\xi} \quad , \quad v_x = \underbrace{v_X}_{\xi} \underbrace{T^T}_{\xi}$$

Sformułowanie słabe, uł. d. globalny

(T2)

$$v_i' u_i' = (\underbrace{v^T}_{\sim} \underbrace{t^T}_{\sim})' (\underbrace{t u}_{\sim})' = (\underbrace{v^T}_{\sim})' \underbrace{T}_{\sim} \underbrace{u}_{\sim}'$$

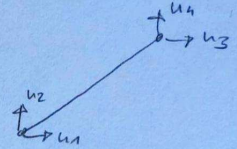
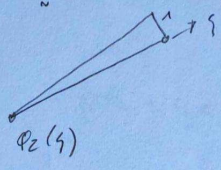
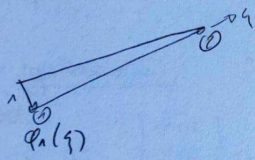
$$\left\{ \begin{array}{l} u = ? \text{ (szukana war. postarowa)} \\ \sum_i \int_{\delta_i} AE (v^T)' T' u' d\zeta = \sum_i \int_{\delta_i} v^T t^T q_i d\zeta + \sum_i v^T t^T AE (t u)' \Big|_0^{\ell_i} \end{array} \right.$$

$[s] [c] = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}$

2) Aproksymacja

$$u_h = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} + u_4 \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{N_1} \quad \underbrace{\quad}_{N_2} \quad \underbrace{\quad}_{N_3} \quad \underbrace{\quad}_{N_4}$
 st. swob.



3) Macierz i wektor elementu

$$K_{ij}^e = AE \int_0^{\ell} (N_i^T)' T (N_j)' d\zeta$$

$$F_i^e = \int_0^{\ell} N_i^T t^T q_i d\zeta$$

(zwykle 0)

$q_i = \text{const}$

$$K_e = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$$F_e = \frac{q_i \ell}{2} \begin{bmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{bmatrix}$$

(T3)

4) Układ równań alg. po agregacji

(a) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{globalna} \\ \text{macierz sz.}}}{\underset{\sim}{K}} \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{W}$ ← wektory s.d. węzłowych (bez agregacji)
 \uparrow
 zwykłe 0

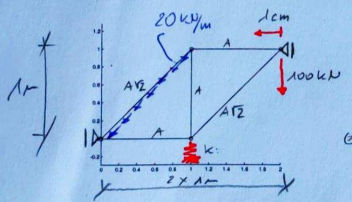
(b) warunki kinematyczne (podporowc)

(c) Po wzwiżaniu ukł. r. można obliczyć reakcje

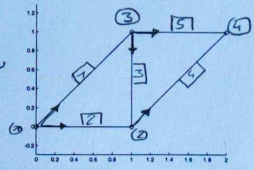
$$\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{F}$$

Example - a truss

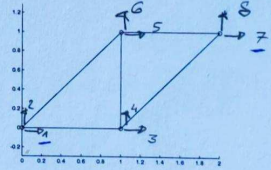
(T4)



$A = 10^{-3} m^2$
 $E = 200 \cdot 10^6 kPa$
 $k = 100 \cdot 10^3 kN/m$
[A25]



Discretization



DOFs

element	nodes	AE/10 ⁵	α	c	s
1, 4	1, 3 (2, 4)	2.828	+45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2, 5	1, 2 (3, 4)	2	0	1	0
3	3, 2	2	-90	0	-1

$$\underset{\sim}{k}^{el} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & \ominus \\ cs & s^2 & \ominus \\ \ominus & \ominus & \oplus \end{bmatrix}$$

$q = \text{const}$

$$\underset{\sim}{P}^{el} = \frac{qL}{2} \begin{bmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{20 \cdot \sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -10 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

T5

$$\tilde{K}_e^1 = \tilde{K}_e^4 = 10^5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}_e^1 = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_e^2 = \tilde{K}_e^5 = 10^5 \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_e^3 = 10^5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

	①	②	③	④			
①	3	1	-2	0	-1	-1	0
	1	1	0	0	-1	-1	0
②	-2	0	3	1	0	0	-1
	0	0	1	④	0	-2	-1
③	-1	-1	0	0	3	1	-2
	-1	-1	0	-2	1	3	0
④	0	0	-1	-1	-2	0	3
	0	0	-1	-1	0	0	1

-10
-10
0
0
-10
-10
0
-100

← v.l. ($u_1=0$)

$-ku_4$

← n. 7 ($u_7 = -0.01$)

③+1

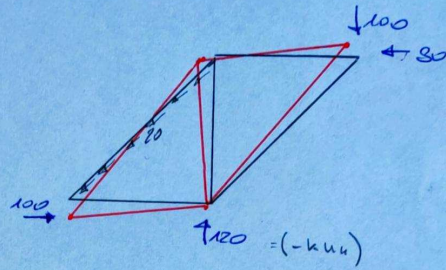
↑
(1)

↑
(7)

Rozwiązanie

(46)

$$\tilde{u} = 10^{-2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1.15 \\ -0.05 \\ -0.12 \\ -1.01 \\ -0.13 \\ -1.00 \\ 0.73 \end{bmatrix} \quad [\text{m}]$$



$$\tilde{W} = \tilde{k} \tilde{u} - \tilde{P} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 120 \\ 0 \\ 0 \\ -80 \\ -100 \end{bmatrix} \quad (\text{see } k \text{ w } k) \quad [\text{kN}]$$

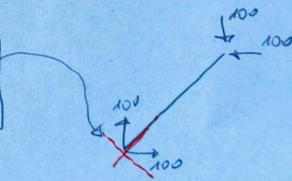
siły osiowe

d. 4.

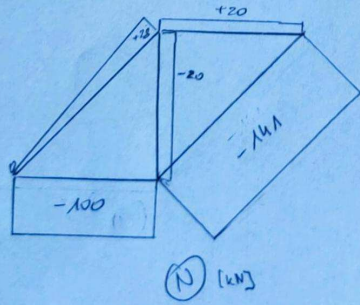
$$u_4^e = \begin{bmatrix} -0.05 \\ -0.12 \\ -1.00 \\ 0.73 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$$

$$\tilde{W}^e = \tilde{k}^e u_4^e - (\tilde{P}^e)$$

$$\tilde{W}^4 = \tilde{k}_4^e u_4^e = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix}$$

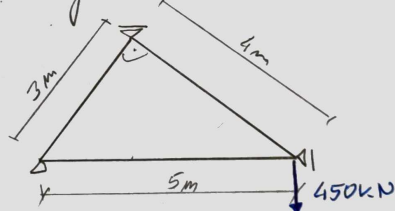


$$N_4 = -2 \cdot 100 \frac{E}{L} = -144$$



Zadanie

Dla poniżej narysowanej kratownicy zastosować MES do obliczenia jej deformacji, reakcji i sił przekrojowych. Sprawdzić poprawność uzyskanych wyników.



$$AE = 2 \cdot 10^5 \text{ kN}$$

10 MES dla belek

(B1)

Bełki (Eulera-Bernoulli'ego)

• R. różn. $w(x) = ?$

$$\begin{cases} EJ w'''' = -M \\ M' = Q \\ Q' = -q \\ + \text{war. podp.} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} EJ w'''' = q \\ + \text{war. podp.} \end{cases}$$

(do kinematycznych
polezi w, w')

• Zasada prac wirtualnych

$w(x) = ?$, spełnia warunki kinematyczne (w, w')

$$\int_0^L v'' EJ u'' dx = \int_0^L v q dx + \sum_M v(x_M) P_M + \sum_M v'(x_M) M_M$$

v - wirt. wj.

$K_{ij}^E = \int_0^L \psi_i'' EJ \psi_j'' dx$ (macierz sztywności)

$f_i^e = \int_0^L \psi_i q dx$ (wektor obciążenia)

P_M, M_M zliczone w globalnym układzie wsp. ułożenie wektora obc.

• Aproxymacja

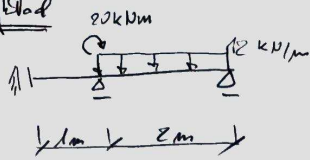
$\psi_i(x)$ - wielomiany Hermite'a (3st, klasy C1)

$$K^e = \frac{2EJ}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & 3h & -6 & 3h \\ 3h & 2h^2 & -3h & h^2 \\ -6 & -3h & 6 & -3h \\ 3h & h^2 & -3h & 2h^2 \end{bmatrix}$$

$q = \text{const}$

$$f_e = \begin{bmatrix} qh/2 \\ qh^2/12 \\ qh/2 \\ -qh^2/12 \end{bmatrix}$$

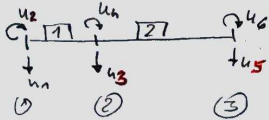
Przykład



$EI = 400 \text{ kNm}^2$

132

Dyskretyzacja



Węzły = węzły w miejscach podpór i ewentualnie obc. skupionych

Agregacja

el. 1

$$K_1^e = 100 \begin{bmatrix} 48 & 24 & -48 & 24 \\ 24 & 16 & -24 & 8 \\ -48 & -24 & 48 & -24 \\ 24 & 8 & -24 & 16 \end{bmatrix}$$

$$f_1^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

el. 2

$$K_2^e = 100 \begin{bmatrix} 6 & 6 & -6 & 6 \\ 6 & 8 & -6 & 4 \\ -6 & -6 & 6 & -6 \\ 6 & 4 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$f_2^e = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ - \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Układ r. obg i wao. kin.

$$\begin{matrix}
 & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & & & \\
 \begin{matrix} \times \\ \times \\ 100 \\ \times \end{matrix} & \begin{bmatrix} 48 & 24 & -48 & 24 \\ 24 & 16 & -24 & 8 \\ -48 & 24 & 54 & -18 \\ -24 & 8 & -18 & 24 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 4 \\ - \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & \begin{matrix} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \end{matrix} & \begin{matrix} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \end{matrix} & \begin{matrix} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \end{matrix} & & & & \\
 & \begin{matrix} K \\ \sim \end{matrix} & \begin{matrix} U \\ \sim \end{matrix} & & = & \begin{matrix} f \\ \sim \end{matrix} & + & \begin{matrix} W \\ \sim \end{matrix}
 \end{matrix}$$

Rozwiązanie

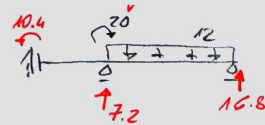
(B3)

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \\ 26 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



Postprocessing

$$\underline{W} = \underline{K} \underline{u} - \underline{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10.4 \\ -7.2 \\ 20.0 \\ -16.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\sum Y = 0 \quad \sum M = 0$$

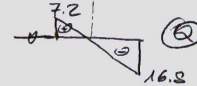
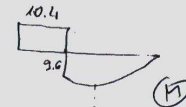
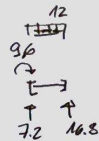
(el. 1)

$$\underline{W}_1^e = \underline{K}_1^e \underline{u}_1^e - \underline{f}_1^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -10.4 \\ 0 \\ 10.4 \end{bmatrix}$$



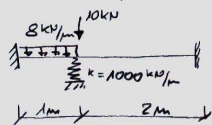
(el. 2)

$$\underline{W}_2^e = \underline{K}_2^e \underline{u}_2^e - \underline{f}_2^e = \begin{bmatrix} -7.2 \\ 9.6 \\ -16.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Zadanie

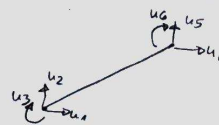
Zastosować MES dla poniższej belki:



$$EI = 200 \text{ kNm}^2$$

Rama płaska

("belka + kwadrat")



st su
element
ramowego

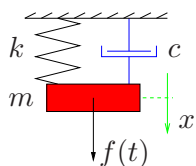
11 Zastosowanie MES do zadań dynamiki

Drgania są bardzo powszechnym zjawiskiem. W niektórych przypadkach są pożyteczne (muzyka, maszyny do przesiewania). W niektórych negatywnym (drżania budynków, mostów, fundamentów pod turbozespoły). Inżynierowie zajmują się zarówno wywoływaniem drgań jak i tłumieniem drgań.

1. Zadania dynamiki

- drgania własne
- odpowiedź na zmienne w czasie obciążenie (periodyczne albo nieperiodyczne)
- propagacja fal mechanicznych

2. Przykład z 1 stopniem swobody, punkt materialny



Zasada pędu (i popędu)

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) & \forall t \in (t_0, t_1) \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (*)$$

Dla $f(t) = 0$, $x(t) = A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t}$, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

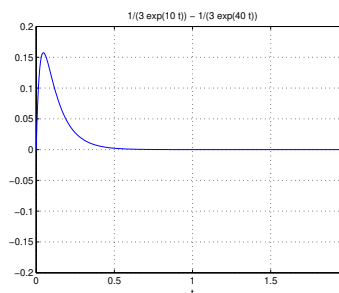
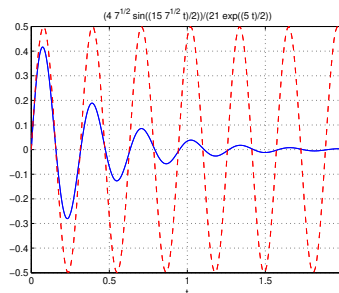
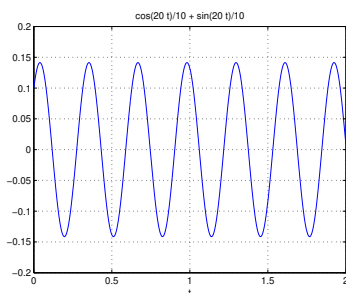
- brak tłumienia, $c = 0 \rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow x = A \cos(\omega t - \varphi)$

$$-mA\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) + kA \cos(\omega t - \varphi) = 0$$

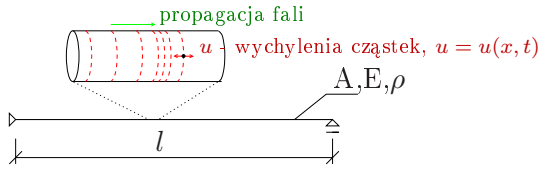
$$\boxed{kA = \omega^2 mA, A \neq 0} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} - \text{częstość kątowna (kołowa) drgań własnych}$$

- słabe tłumienie $x = Ae^{-\zeta\omega t} \cos(\omega_d t - \varphi)$, $\omega_d = \omega\sqrt{1 - \zeta^2}$, $\zeta = \frac{\delta}{\omega}$, $\delta = \frac{c}{2m}$

- mocne tłumienie $x = A_1 e^{\alpha_1 \omega t} + A_2 e^{\alpha_2 \omega t}$, $\alpha_1, \alpha_2, \omega \in R$



3. Drgania osiowe pręta sprężystego



fala podłużna

cząstki przemieszczają się w kierunku propagacji fali

4. Drgania własne (fala stojąca)

$$\begin{cases} \rho \ddot{u} - E u'' = 0 & \forall x \in (0, l), \forall t \in [t_0, t_1] \\ u(0, t) = 0 & \forall t \in [t_0, t_1] \\ u'(l, t) = 0 & \forall t \in [t_0, t_1] \end{cases} \quad (76)$$

Rozdzielenie zmiennych: $u(x, t) = U(x)V(t) \rightarrow \frac{U''}{U} = \frac{\ddot{V}}{V} \frac{\rho}{E} = const$, a stąd otrzymujemy 2 problemy własne (równania Helmholtz'a zredukowane do 1D)

$$\begin{cases} \ddot{V} + \omega_n^2 V = 0 & \forall t \in [t_0, t_1] \\ U'' + k_n^2 U = 0 & \forall x \in [0, l], n \in N \end{cases} \quad (77)$$

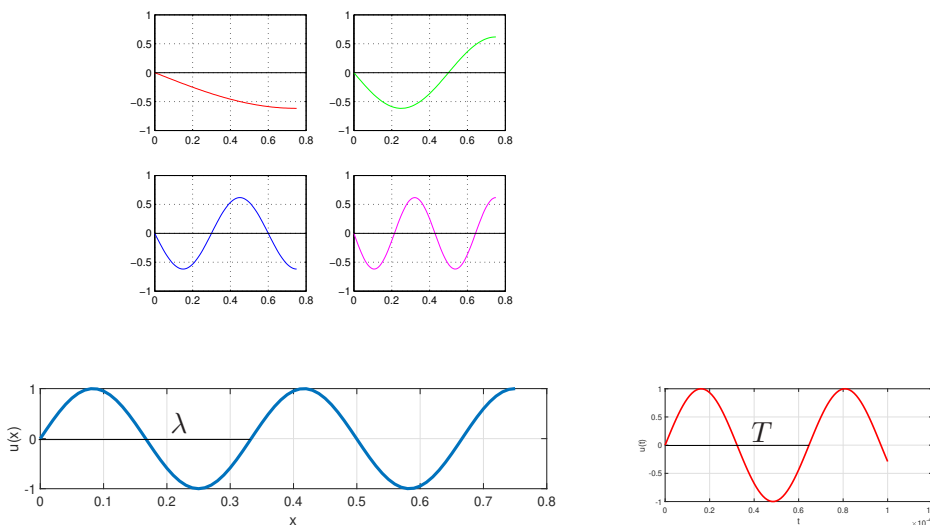
gdzie ω_n są częstościami kątowymi [rad/s], $k_n = \omega_n \sqrt{\frac{\rho}{E}}$ liczbami falowymi [rad/m], a ogólne, nietrywialne rozwiązanie ma postać

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] [(C_n \cos(k_n x) + D_n \sin(k_n x))], \quad (78)$$

$$\omega_n = 2\pi f_n, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T_n}, \quad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}, \quad \frac{\lambda_n}{T_n} = \frac{\omega_n}{k_n} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{— prędkość (fazowa) dźwięku}$$

Dla przyjętych warunków brzegowych

$$k_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2l}, \quad \omega_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad u_n(x) = \beta \sin[(2n - 1) \frac{\pi}{2l} x] \quad (79)$$



5. Zastosowanie MES

- Sformułowanie słabe, równoważne zasadzie pędu z liniowymi związkami fizycznymi i geometrycznymi¹²: znaleźć $u(x, t) \in V$, spełniające warunki kinematyczne i

$$\int_0^l v A \rho \ddot{u} \, dx + \int_0^l v A c \dot{u}' \, dx + \int_0^l v' A E u' \, dx = \int_0^l v q \, dx + \sum_i v_i P_i, \quad \forall v(x) \in V_0, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (80)$$

- Aproksymacja: $u_h(x, t) = \alpha_1(t)\varphi_1(x) + \alpha_2(t)\varphi_2(x) + \dots + \alpha_N(t)\varphi_N(x)$
- Macierze (elementu)

$$\text{mas: } M_{ij}^{(e)} = \int_e \varphi_i A \rho \varphi_j \, dx$$

$$\text{tłumienia: } C_{ij}^{(e)} = \int_e \varphi_i A c \varphi_j' \, dx$$

$$\text{szttywności: } K_{ij}^{(e)} = \int_e \varphi_i' A E \varphi_j' \, dx$$

- Po agregacji i uwzględnieniu warunków kinematycznych otrzymuje się układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{cases} \bar{M}\ddot{\mathbf{u}} + \bar{C}\dot{\mathbf{u}} + \bar{K}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{f}}(t) & \forall t \in (0, T) \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}(t=0) = \mathbf{v}_0 \end{cases}$$

- **Drgania własne** \Rightarrow uogólniony problem własny

Znaleźć $\mathbf{u} \neq 0$ takie, że $\bar{M}\ddot{\mathbf{u}} + \bar{K}\mathbf{u} = 0 \quad \forall t \in (0, T)$

Ponieważ $\mathbf{u} = \mathbf{U} \sin(\omega t + \psi)$, więc $(-\omega^2 \bar{M}\mathbf{U} + \bar{K}\mathbf{U}) \sin(\omega t + \psi) = 0 \quad \forall t \in (0, T)$, czyli

$$\begin{cases} \bar{K}\mathbf{U} = \omega^2 \bar{M}\mathbf{U} \\ \mathbf{U}^T \bar{M}\mathbf{U} = 1 \end{cases} \quad (81)$$

Rozwiązaniem tego zadania, w którym nie występuje czas, są postacie (amplitudy) drgań własnych $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N)$ i ich częstości $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$.

- Dzięki symetrii i dodatniej określoności \bar{M} and \bar{K} postacie są ortogonalne, t.zn.

$$\mathbf{U}_i^T \bar{M}\mathbf{U}_j = 0, \quad \mathbf{U}_i^T \bar{K}\mathbf{U}_j = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

$$\mathbf{U}_k^T \bar{M}\mathbf{U}_k = 1, \quad \mathbf{U}_k^T \bar{K}\mathbf{U}_k = \lambda_k \quad (\text{dla unormowanych } \mathbf{U}_k), \quad i, j, k = 1, 2, \dots, N$$

- przykład

¹²Takie samo sformułowanie opisuje np. drgania poprzeczne struny albo drgania skrętne pręta.

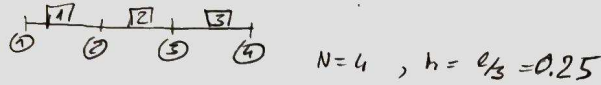
Osiowe drgania pręta



$l = 0.75 \text{ m}$
 $A = 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
 $E = 207 \text{ GPa} = 207 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
 $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5.15 \text{ km/s}$
 (prędkość dźwięku)

• dyskretyzacja



• agregacja

$K^e = \frac{AE}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M^e = \frac{A \rho g h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \omega^2 \frac{h^2}{Gc^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

• war. kinematyczny $U_1 = 0 \rightarrow$ zerowanie + 1 na przekątnej (albo "wyczenie" $4 \times 4 \rightarrow 3 \times 3$)

• rozwiązanie uogólnionego problemu własnego

"wyczenie" (maks. 2×2) $\det \begin{bmatrix} 2 - 4\lambda & -1 - \lambda & 0 \\ -1 - \lambda & 2 - 4\lambda & -1 - \lambda \\ 0 & -1 - \lambda & 1 - 2\lambda \end{bmatrix} = 0, \quad \lambda = \omega^2 \frac{h^2}{Gc^2}$
 $\lambda \geq 0$

wartości własne, nie dążą do 0!

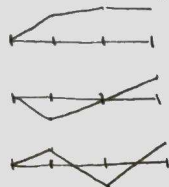
numerycznie: faktoryzacja $M = LL^T + \text{Jacobi (mp.)}$

• postprocessing $\lambda_1 = 0.04675, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 1.646$

spektrum częstotliwości $\downarrow f_i = \frac{c}{h} \sqrt{\frac{\lambda_i}{2\pi}}$
 $f = [1737, 5680, 10305] \text{ Hz}$
 faza: $[1717, 5152, 8586]$
 trend: $10\%, 10\%, 10\%$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.17 & -0.41 & 0.27 \\ 0 & 0.30 & 0 & -0.47 \\ 0 & 0.34 & 0.41 & 0.54 \end{bmatrix}$
 $\downarrow \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3$

postacie obgapi własnych (ortogonal.)



$f_L = [1638, 4638, 6336]$
 $-10\%, -10\%, -26\%$

$M_L = \frac{A \rho g h}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

6. Kratownica

- Sformułowanie mocne (w lokalnym układzie współrzędnych (ξ, η) , ξ - oś pręta:

$$\begin{cases} A\rho\ddot{u}_\xi + Ac\dot{u}'_\xi - AEu''_\xi & = q \\ A\rho\ddot{u}_\eta & = 0 \\ +war. kin., stat. i pocz. & \end{cases} \quad \forall \xi, t, \gamma \quad (82)$$

gdzie ρ, c oznaczają gęstość i współczynnik tłumienia wiskotycznego materiału pręta. Po pomnożeniu pierwszego równania przez v_ξ , drugiego przez v_η , dodaniu stronami, wycalkowaniu przez części składnika z pochodnymi przestrzennymi, a następnie przejściu na składowe w globalnym układzie współrzędnych (x, y) otrzymuje się sformułowanie słabe.

- Sformułowanie słabe: $\mathbf{u}(x, y, t)$ spełnia warunki kinematyczne i początkowe

$$\sum_i \int_{\gamma_i} A \left(\rho \mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + c \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \dot{\mathbf{u}}' dx + E \mathbf{v}' \cdot \mathbf{T} \mathbf{u}' \right) dx = \sum_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{P}_k(t), \quad \forall \mathbf{v}, t \quad (83)$$

- Na podstawie sformułowania słabego można obliczyć elementowe macierze mas, tłumienia i sztywności

$$\mathbf{M}^e = \frac{A\rho h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^e = \alpha \mathbf{M}^e + \beta \mathbf{K}^e \quad \mathbf{K}^e = \frac{AE}{h} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (84)$$

7. Belka

- Sformułowanie mocne:

$$A\rho\ddot{w} + EIw^{iv} = q \quad \forall \xi, t + war. kin., stat. i pocz. \quad (85)$$

- Sformułowanie słabe: $w(x, t)$ spełnia warunki kinematyczne i początkowe

$$\int_0^l \left(A\rho v \ddot{w} + EI v'' w'' \right) dx = \int_0^l v q(t) dx + \sum_n v_n P_n(t) + \sum_m v'_m M_m(t), \quad \forall \mathbf{v}, t \quad (86)$$

- Macierz mas (tłumienia ma współczynnik c zamiast ρ)

$$\mathbf{M}^e = \frac{A\rho h}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix} \quad (87)$$

8. Homework

- zastosować 2 elementy skończone z liniowymi funkcjami kształtu do zadania osiowych drgań własnych pręta
- obliczyć globalne macierze mas i sztywności
- obliczyć spektrum częstości własnych i odpowiadające im postacie drgań własnych
- sprawdzić ortogonalność obliczonych wektorów własnych
- powtórzyć obliczenia dla zdiagonalizowanej macierzy mas

12 Oszacowanie błędu aproksymacji MES

Approximation error estimates

Intro

Real or designed object
 ↓ modeling error
 (u) ← Model (diff. eqs.)
 ↓ approximate error
 (u_h) ← FEM approx. of the solution
 ↓ numerical error
 (u_h) ← computation

DEF

$E = u - u_h$ a function

$\|u\|$ - measure of the error (length is a measure of a vector)

$\|u\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
 $\|cu\| = |c| \|u\|$
 $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$\|u\|_0 = \sqrt{\int_{\Omega} u^2 dx}$
 $\|u\|_1 = \sqrt{\int_{\Omega} (u^2 + (u')^2) dx}$
 $\|u\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} (u^2 + (u')^2 + (u'')^2) dx}$

Example

$$\begin{cases} -u'' + u = x^2 - 6x^2 + 12, & x \in (0,5) \\ u(0) = 0 \\ u(5) = 5 \end{cases}$$

Solution: $u(x) = x^3 - 6x^2 + 6x$

$\|u\|_0 = 12.7$
 $\|u\|_1 = 16.0$

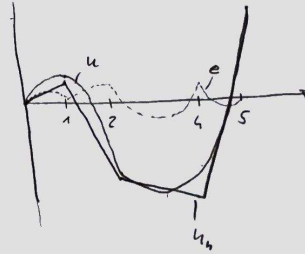
FEM solution

5 dots, (Qu. ch. f.)

B 2

$$x = \begin{array}{cccccc} & \times & \times & \times & \times & \times \\ x = & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{array}$$

x_i	0	1	2	4	5
u_i	0	0.938	-4.80	-9.15	5
$u(x_i)$	0	1	-4	-8	5



$$\|e\|_0 = 2.43$$

$$\|e\|_1 = 7.34$$

Relative error

$$\frac{\|e\|_0}{\|u\|_0} = 19.2\%$$

$$\frac{\|e\|_1}{\|u\|_1} = 46.0\%$$

contribution of elements to the error norm (localization)

$$\rho_i = \frac{\|e\|_{m,T_i} \leftarrow \text{ith element}}{\|u\|_{m,\Omega} \leftarrow \text{reference value}} \quad (\text{relative indicator})$$

el. i)	1	2	3	4
$\rho_i, m=0$	6.71	5.62	15.3	7.47
$\rho_i, m=1$	16.3	7.26	31.7	28.1

min MAX

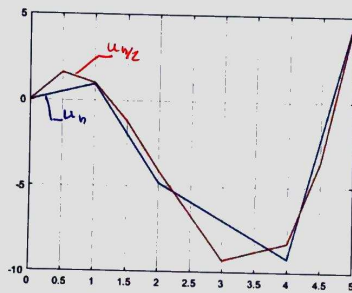
Hierarchical (Runge) error estimate

c/4

$$e_n \approx u_{n/2} - u_n$$

Nodal val

x_i	0	0.5	1	1.5	2	3	4	4.5	5
u_n	0	$\frac{0+0.94}{2}$	0.94	$\frac{0.94-4.8}{2}$	-4.8	-7.0	-9.2	-8.1	5
$u_{n/2}$	0	1.6	1	-1.2	-4.1	-9.3	-8.3	-3.5	5



$$\|u_{n/2} - u_n\|_0 = 2.08$$

$$\|u_{n/2} - u_{n/4}\|_1 = 6.37$$

reference values

$$\|u_{n/2}\|_0 = 12.3$$

$$\|u_{n/2}\|_1 = 15.9$$

$$\frac{\|e\|_0}{\|u_{n/2}\|_0} \approx 16.9\%$$

$$\frac{\|e\|_1}{\|u_{n/2}\|_1} \approx 40.1\%$$

error indicators

$$\frac{\|e\|_{m,T_i}}{\|u_{n/2}\|_{m,T_i}} = b_i^h$$

i	1	2	3	4
$b_i^h, m=0$	5.6	4.8	13	6.4
$b_i^h, m=1$	14.0	6.2	28	24
		min	max	

Residual error estimate

For the example $L(u) = f$
 $-u'' + u = x^3 - 6x^2 + 12$

$$R(x) = x^3 - 6x^2 + 12 + u_h'' - u_h \stackrel{?}{=} 0$$

$$R(x) \stackrel{\text{def.}}{=} f - L(u_h)$$

Theorem $\|e\|_{1, \Omega} \in C \|R\|_0$

$$\tau_i^R = h^p \sqrt{\int_{T_i} R^2 dx} \quad (1D)$$

computable inside of elements

$\tau_i \approx 2D + h^{p-1} \|j\|$
 ↓ of the first derivative (trace)

$$e = u - u_h$$

$$L(u) = f \rightarrow L(u_h + e) = f \Rightarrow L(e) = f - L(u_h) = R$$

$$\|R\|_{0, \Omega} = 29.5 \rightarrow \frac{29.5}{46.9} \approx 63\%$$

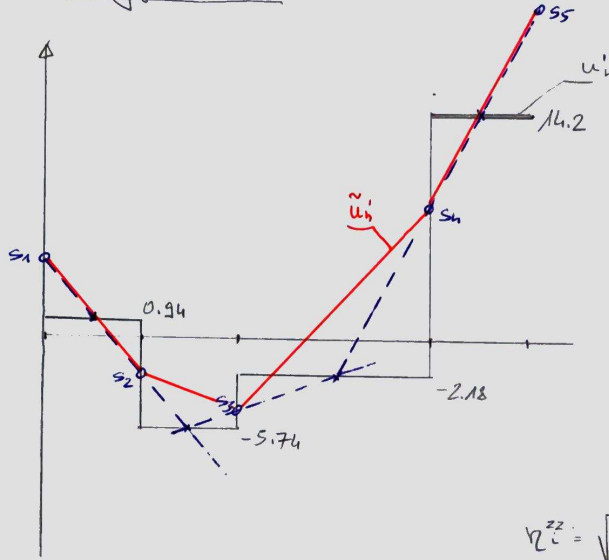
↑ weighted (reference) value

Elementwise

i	1	2	3	4	
τ_i^R	21.2	8.5	47.9	337	[%]
		min	max		

Metoda wygładzenia (Zienkiewicz-Zhu)

E



- 1) u_n'
- 2) S_i - pochodna w węzłach
- $S_2 = -2.4$
- $S_3 = -4.5$
- $S_4 = 8.7$
- $S_1 = 4.3$
- $S_5 = 0$

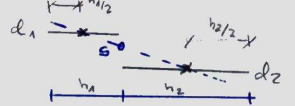
3) $\tilde{u}_n' = \sum S_i \varphi_i$
wzmacniona pochodna

$$\eta_{\tilde{u}}^{zz} = \sqrt{\int_{\Omega} (\tilde{u}_n' - u_n')^2 dx}$$

1) dla każdego elementu

$$u_n = u_1 \varphi_1(x) + u_2 \varphi_2(x) \Rightarrow u_n' = u_1 \varphi_1'(x) + u_2 \varphi_2'(x) \quad \left(\frac{u_2 - u_1}{h} \right)$$

2) interpolacja w węzłach

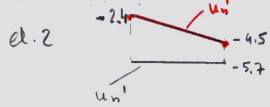


dla $h_1 = h_2 = h \quad s = \frac{d_1 + d_2}{2}$

3) wzmacniona pochodna (dla każdego elementu)

$$\tilde{u}_n' = S_1 \varphi_1 + S_2 \varphi_2$$

Prz.



$$\left(\eta_{\tilde{u}}^{zz} \right)^2 = \left\{ \begin{matrix} 3.3 & 1.2 \\ 1.3 & 1.2 \end{matrix} \right\} = 5.5, \quad \eta_{\tilde{u}}^{zz} = 2.3$$

Wartość porównawcza $\sqrt{\sum (S_i^{zz})^2} = 16.3$

Względne wskaźniki

$$\bar{\eta}_1^{zz} = 11.8, \quad \bar{\eta}_2^{zz} = 14.4, \quad \bar{\eta}_3^{zz} = 49.7, \quad \bar{\eta}_n^{zz} = 13.3 \quad [\%]$$

Zadanie

Zastosować metody residualną oraz wygładzenia do obliczenia wskaźnika błędów aproksymacji MES rozwiązania równania: $-u'' + 2u = 1$ w elemencie [2] z liniowymi funkcjami kształtu dla następujących wartości węzłowych:

x_i	0	1	2	3
u_i	-1	0	2	-2